فصل ۲۴

میدان‌های الکتریکی

بخش ۲۴-۳ تعریف B

۱- SSM ILW پروتونی با زاویهٔ °۲۳/۰ نسبت به جهت یک میدان مغناطیسی با شدت ۲/۶۰ mT حرکت می‌کند و نیروی مغناطیسی $۶/۵۰\times۱۰^{-۱۷}$ N بر آن وارد می‌شود. (الف) تندی پروتون و (ب) انرژی جنبشی آن را برحسب الکترون ولت، محاسبه کنید.

حل: (الف) $F=qvB\sin\theta \Rightarrow v=\dfrac{F}{qB\sin\theta}$

$$v=\frac{۶/۵\times۱۰^{-۱۷}}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲/۶\times۱۰^{-۳})(\sin ۲۳^\circ)}=۴\times۱۰^{۵}\ \text{m/s}$$

(ب) $K=\dfrac{۱}{۲}mv^{۲}=\dfrac{۱}{۲}(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})(۴\times۱۰^{۵})^{۲}=۱/۳۴\times۱۰^{-۱۶}\ \text{J}$

$$=(۱/۳۴\times۱۰^{-۱۶})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=۸۳۵\ eV$$

۲- ذره‌ای به جرم ۱۰g و بار ۸۰μC در میدان مغناطیسی یکنواخت در ناحیه‌ای که شتاب سقوط آزاد $-۹/۸\hat{j}\text{m/s}^{۲}$ است حرکت می‌کند. سرعت ذره مقدار ثابت $۲۰\hat{i}$km/s است که بر میدان مغناطیسی عمود است. میدان مغناطیسی چگونه است؟

حل: نیروی وزن نیروی مغناطیسی را خنثی کرده است، لذا داریم:

$$\vec{F}_g=\vec{F}_B \Rightarrow mg\,\hat{j}=q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$$(۱۰\times۱۰^{-۳})(۹/۸)\hat{j}=(۸\times۱۰^{-۶})[(۲۰\times۱۰^{۳}\,\hat{i})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})]$$

از مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت:

$$\vec{B}=-۶/۱\times۱۰^{-۲}\,\hat{k}\ \text{N}$$

لذا $B_x=۰\quad B_y=۰\quad B_z=-۶/۱\times۱۰^{-۲}$

۳- الکترونی با سرعت

$$\vec{v}=(۲/۰\times۱۰^{۶}\ \text{m/s})\hat{i}+(۳/۰\times۱۰^{۶}\ \text{m/s})\hat{j}$$

در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۰/۰۳۰\text{T})\hat{i}+(۰/۱۵\ \text{T})\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) نیروی وارد بر الکترون را پیدا کنید. (ب) محاسبه را برای پروتونی با همین سرعت تکرار کنید.

حل: (الف)

$$\vec{F}=q\,\vec{v}\times\vec{B}=-(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۲\times۱۰^{۶} & ۳\times۱۰^{۶} & ۰\\ ۰/۰۳ & -۰/۱۵ & ۰\end{vmatrix}$$

$$=-(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[(-۰/۳\times۱۰^{۶}-۰/۰۹\times۱۰^{۶})]\hat{k}$$

$= ۶/۲۴\times ۱۰^{-۱۲}\,\hat{k}\ \text{N}$

(ب) وقتی به جای الکترون پروتون داشته باشیم مقدار نیرو تغییر نمی‌کند ولی جهت آن عوض می‌شود.

$\vec{F} = -۶/۲۴\times ۱۰^{-۱۲}\,\hat{k}\ \text{N}$

●۴- یک ذرهٔ آلفا با سرعت $\vec{v}$ با بزرگی $۵۵۰\,\text{m/s}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $۰/۰۴۵\,\text{T}$ حرکت می‌کند (بار ذره آلفا $+۳/۲\times ۱۰^{-۱۹}\,\text{C}$ و جرم آن $۶/۶\times ۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$ است.) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برابر با ۵۲° است. بزرگی (الف) نیروی $\vec{F}_B$ وارد بر ذره ناشی از میدان و (ب) شتاب ذره ناشی از $\vec{F}_B$ چقدر است؟ (پ) آیا تندی ذره افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

حل: (الف) $F = qvB\sin\theta$

$= (۳/۲\times ۱۰^{-۱۹})(۵۵۰)(۰/۰۴۵)(\sin ۵۲^\circ)$

$= ۶/۲۴\times ۱۰^{-۱۸}\ \text{N}$

(ب) از قانون دوم نیوتون داریم

$F = ma \Rightarrow ۶/۲۴\times ۱۰^{-۱۸} = (۶/۶\times ۱۰^{-۲۷})a$

$\Rightarrow a = ۹/۴۶\times ۱۰^{۸}\ \text{m/s}$

(پ) چون نیرو بر سرعت عمود است لذا کاری روی ذره انجام نمی‌دهد و تندی ذره بدون تغییر می‌ماند. شتاب جانب مرکز است فقط صرف تغییر جهت سرعت می‌شود و مقدار آن را تغییر نمی‌دهد.

●●۵- الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B} = B_x\hat{i} + (۳/۰B_x)\hat{j}$ داده شده است. در یک لحظهٔ معین سرعت الکترون $\vec{v} = (۲/۰\hat{i} + ۴/۰\hat{j})\text{m/s}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر آن $(۶/۴\times ۱۰^{-۱۹}\text{N})\hat{k}$ است. B_x را پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

$(۶/۴\times ۱۰^{-۱۹})\hat{k} = -(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})[(۲\hat{i} + ۴\hat{j})\times(B_x\hat{i} + ۳B_x\hat{j})]$

$= -(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶B_x - ۴B_x)\hat{k}$

در نتیجه داریم $B_x = -۲T$.

●●۶- (GO) پروتونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B} = (۱۰\hat{i} - ۲۰\hat{j} + ۳۰\hat{k})\text{mT}$ داده شده است. در لحظهٔ $t_۱$ سرعت پروتون با $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + (۲/۰\,\text{km/s})\hat{k}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون با $\vec{F}_B = (۴/۰\times ۱۰^{-۱۷}\,\text{N})\hat{i} + (۲/۰\times ۱۰^{-۱۷}\,\text{N})\hat{j}$ داده شده است. در آن لحظه (الف) v_x و (ب) v_y چقدر است؟

حل: (الف) و (ب) $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

$= (۴\times ۱۰^{-۱۷}\,\hat{i} + ۲\times ۱۰^{-۱۷}\,\hat{j})$

$= e(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + ۲\times ۱۰^{۳}\,\hat{k})\times(۱۰\hat{i} - ۲۰\hat{j} + ۳۰\hat{k})\times ۱۰^{-۳}$

$= (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})[(۰/۰۳v_y + ۴۰)\hat{i} + (۲۰ - ۰/۰۳v_x)\hat{j}$

$-(۰/۰۲v_x - ۰/۰۱v_y)\hat{k}]$

از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت

$v_y = ۷\times ۱۰^{۳}\ \text{m/s} \quad , \quad v_x = ۳/۵\times ۱۰^{۳}\ \text{m/s}$

بخش ۲۴-۴ میدان‌های عمود بر هم: کشف الکترون

●۷- سرعت اولیهٔ الکترونی $(۱۲/۰\hat{j} + ۱۵/۰\hat{k})\text{km/s}$ و شتاب ثابت آن در ناحیه‌ای که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواختی وجود دارند $(۲/۰۰\times ۱۰^{۱۲}\text{m/s}^۲)\hat{i}$ است. اگر $\vec{B} = (۴۰۰\mu\text{T})\hat{i}$ باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = m\vec{a} = (۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})(۲\times ۱۰^{۱۲}\,\hat{i}) = ۱/۸۲\times ۱۰^{-۱۸}\,\hat{i}$

$\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B}$

ابتدای $\vec{v}\times\vec{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۰ & ۱۲\times ۱۰^{۳} & ۱۵\times ۱۰^{۳} \\ ۴۰۰\times ۱۰^{-۶} & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

$= ۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k}$

حال می‌توان نوشت

$۱/۸۲\times ۱۰^{-۱۸}\,\hat{i} = -(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})\vec{E}$

$-(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k})$

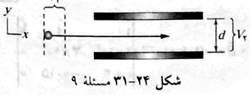
$\Rightarrow \vec{E} = (۱۱/۳۸\hat{i} - ۶\hat{j} + ۴/۸\hat{k})\,\text{V/m}$

●۸- میدان الکتریکی $۱/۵۰\,\text{kV/m}$ و میدان مغناطیسی $۰/۴۰۰\,\text{T}$ بر الکترون متحرکی اثر می‌کنند به طوری که هیچ نیروی خالصی ایجاد نمی‌شود. اگر میدان‌ها بر یکدیگر عمود باشند، تندی الکترون چقدر است؟

حل: $|F_E| = |F_B| \Rightarrow qE = qvB\sin\theta$

$E = vB \Rightarrow ۱۵۰۰ = v(۰/۴) \Rightarrow v = ۳۷۵۰\ \text{m/s}$

●۹- ILW در شکل ۲۴-۳۱، الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل $V_۱ = ۱/۰۰\,\text{kV}$ شتابدار شده و وارد شکاف میان دو صفحهٔ موازی با فاصلهٔ $d = ۲۰/۰\,\text{mm}$ و اختلاف پتانسیل $V_۲ = ۱۰۰\,\text{V}$ می‌شود. صفحهٔ پایینی در پتانسیل کمتر است. از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کرده و فرض کنید که بردار سرعت الکترون بر بردار میدان الکتریکی میان صفحه‌ها عمود است. برحسب بردار یکه، میدان مغناطیسی یکنواختی که موجب حرکت الکترون در راستای یک خط راست در شکاف می‌شود چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۱ مسئلهٔ ۹

حل:

$eV = K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow$

$(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۱\times ۱۰^{۳}) = \frac{۱}{۲}(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})v^۲$

$\Rightarrow v = ۱/۸۷\times ۱۰^{۷}\ \text{m/s}$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = ۰ \Rightarrow E = vB$

$\Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲۰\times ۱۰^{-۳}} = (۱/۸۷\times ۱۰^{۷})B$

$\Rightarrow B = ۲/۶۷\times ۱۰^{-۴}\ T$

●●۱۰- پروتونی در میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی یکنواختی حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{B} = -۲/۵۰\hat{i}\text{mT}$ است. در یک لحظه سرعت پروتون $\vec{v} = ۲۰۰۰\hat{j}\text{m/s}$ است. در این لحظه اگر میدان الکتریکی (الف) $۴/۰۰\hat{k}\text{V/m}$، (ب) $-۴/۰۰\hat{k}\text{V/m}$ و (پ) $۴/۰۰\hat{i}\text{V/m}$ باشد، نیروی خالص وارد بر ذره را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{v}\times\vec{B} = (۲۰۰۰\,\hat{j})\times(-۲/۵\times ۱۰^{-۳}\,\hat{i}) = ۵\hat{k}$

(الف) $\vec{F} = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})[۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۴۴\times ۱۰^{-۱۸}\,\hat{k}$

(ب) $\vec{F} = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})[-۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$

(پ) $\vec{F} = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})[۴\hat{i} + ۵\hat{k}]$

$= ۶/۴\times ۱۰^{-۱۹}\,\hat{i} + ۸\times ۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$

●●۱۱- یک چشمهٔ یون، یون‌های ^{۶}Li ایجاد می‌کند که بار آنها $+e$ و جرم آنها $۹/۹۹\times ۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}$ است. یون‌ها توسط اختلاف پتانسیل $۱۰\,\text{kV}$ شتاب می‌گیرند و به طور افقی وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت قائمی به بزرگی $B = ۱/۲\,\text{T}$ وجود دارد. شدت کمترین میدان الکتریکی را محاسبه کنید که در همان منطقه برقرار شود و یون‌های ^{۶}Li بتوانند بدون انحراف از آن بگذرند.

حل: شرط آنکه یون‌های $L_i^{۶}$ بدون انحراف عبور کنند این است که $\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B}$ باشد، یعنی داریم:

$E = vB$

از طرف دیگر یون‌ها تحت ولتاژ V شتاب می‌گیرید، یعنی:

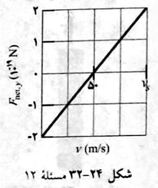
$eV = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۱۰\times ۱۰^{۳})$

$= \frac{۱}{۲}(۹/۹۹\times ۱۰^{-۲۷})v^۲ \Rightarrow v = ۵/۶۶\times ۱۰^{۵}\ \text{m/s}$

لذا داریم:

$E = (۵/۶۶\times ۱۰^{۵})(۱/۲) = ۶/۸\times ۱۰^{۵}\ \text{V/m}$

●●●۱۲- (GO) در لحظهٔ $t_۱$، الکترونی در جهت مثبت محور x از میان دو میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ فرستاده می‌شود که $\vec{E}$ موازی محور y است. شکل ۲۴-۳۲ مؤلفهٔ y نیروی خالص وارد بر الکترون، $F_{net,y}$ را از طرف دو میدان برحسب تابعی از تندی v الکترون در لحظهٔ $t_۱$ نشان می‌دهد. مقیاس محور سرعت با $v_s = ۱۰۰/۰\,\text{m/s}$ مشخص شده است. مؤلفه‌های x و z نیروی خالص در لحظهٔ $t_۱$ برابر صفرند. با فرض $B_x = ۰$، (الف) بزرگی E و (ب) $\vec{B}$ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.



شکل ۲۴-۳۲ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) نیروی الکتریکی $\vec{F} = q\vec{E}$ و نیروی مغناطیسی $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ است. در $v = ۰$ نیروی مغناطیسی صفر است. از منحنی دیده می‌شود که $v = ۰$ مؤلفهٔ y نیروی برابر با $-۲\times ۱۰^{-۱۹}\ N$ است. لذا بزرگی میدان الکتریکی

$E = \frac{F}{e} = \frac{۲\times ۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۱/۲۵\ \ \text{N/C}$

(ب) طبق فرض مسئله نیروفقط در ابتداد محور x عمل می‌کند و الکترون در این راستا حرکت می‌کند و نیروهای الکتریکی و مغناطیسی همدیگر را خنثی می‌کنند. از روی نمودار در چنین حالتی که نیروی خالص صفر است، $v = ۵۰\,\text{m/s}$ است. در نتیجه داریم

$B = \frac{E}{v} = \frac{۱/۲۵}{۵۰} = ۲/۵\times ۱۰^{-۲}\ T$

برای اینکه F_B و F_E یکدیگر را خنثی کنند باید $\vec{v}\times\vec{B}$ در خلاف جهت $\vec{E}$ که رو به سمت $+y$ است، باشد و چون v در جهت $+x$ است لذا طبق قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی باید در جهت $+z$ باشد.

بخش ۲۴-۵ میدان‌های عمود بر هم: اثر هال

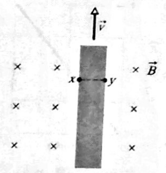
●۱۳- یک نوار مسی به ضخامت $۱۵۰\,\mu\text{m}$ و پهنای $۴/۵\,\text{mm}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی $۰/۶۵\,\text{T}$ و با $\vec{B}$ عمود بر نوار قرار دارد. سپس جریان $i = ۲۳\,\text{A}$ در نوار فرستاده می‌شود به طوری که اختلاف پتانسیل هال V در دو سر پهنای نوار برقرار می‌شود. V را محاسبه کنید. (تعداد حامل‌های بار یکای حجم مس $۸/۴۷\times ۱۰^{۲۸}$ الکترون بر متر مکعب است.)

حل: از معادله (۲۴-۱۲) داریم

$$n=\frac{Bi}{Vle}\Rightarrow 8.47\times10^{28}=\frac{(0.65)(23)}{V(4.5\times10^{-3})(1.6\times10^{-19})}$$

$$\Rightarrow V=2.45\times10^{-7}\ \text{V}$$

●۱۴- همان‌طور که در شکل ۲۴-۳۳ نشان داده شده است، یک نوار فلزی به درازای $6.50\,\text{cm}$، به پهنای $0.850\,\text{cm}$ و ضخامت $0.760\,\text{mm}$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=1.20\,\text{mT}$ که عمود بر نوار است حرکت می‌کند. اختلاف پتانسیل $3.90\,\mu V$ بین نقطه‌های x و y در دو طرف نوار برقرار است. تندی v را محاسبه کنید.

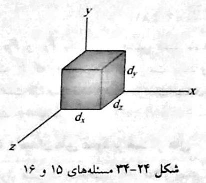


شکل ۲۴-۳۳ مسئلهٔ ۱۴

حل: شرط آنکه حامل بار منحرف نشود این است که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی یکدیگر را خنثی کنند. یعنی $\vec{E}=v\vec{B}$ باشد، لذا می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta V}{L}=vB\Rightarrow\frac{3.9\times10^{-6}}{0.85\times10^{-2}}=v(1.2\times10^{-3})\Rightarrow v=0.38\,\text{m/s}$$

●●۱۵- در شکل ۲۴-۳۴، مکعب رسانای توپری با ابعاد $d_x=5.00\,\text{m}$، $d_y=3.00\,\text{m}$ و $d_z=2.00\,\text{m}$ با سرعت ثابت $\vec{v}=(20.0\,\text{m/s})\hat{i}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(30.0\,\text{mT})\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) میدان الکتریکی داخل مکعب بر حسب بردار یکه و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مکعب چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۴ مسئله‌های ۱۵ و ۱۶

حل: (الف) چون سرعت ثابت است لذا $\vec{F}=0$ است و داریم

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=0\Rightarrow\vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}=-(20\hat{i})\times(30\times10^{-3}\hat{j})=-0.6\hat{k}\ \text{V/m}$$

(ب) $V=Ed=(0.6)(2)=1.2\ \text{V}$

●●●۱۶- شکل ۲۴-۳۴ قطعه فلزی را نشان می‌دهد که وجه‌های آن با محورهای مختصات موازی‌اند. این قطعه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0.020\,\text{T}$ قرار دارد. طول یک ضلع این قطعه $25\,\text{cm}$ است که با مقیاس نشان داده نشده است. این قطعه با تندی $3.0\,\text{m/s}$ به نوبت موازی با هر محور حرکت می‌کند و اختلاف پتانسیل V ظاهر شده در دو طرف قطعه اندازه‌گیری می‌شود. در حرکت موازی با محور y، $V=12\,\text{mV}$، موازی با محور z، $V=18\,\text{mV}$ و موازی با محور x، $V=0$ است. ابعاد قطعه (الف) d_x، (ب) d_y و (پ) d_z چقدرند؟

حل: (الف)، (ب) و (پ): ΔV را اختلاف پتانسیل دو سر هر ضلع و d طول آن ضلع در نظر می‌گیریم، داریم:

$$E=\frac{\Delta V}{d}\Rightarrow vB=\frac{\Delta V}{d}$$
$$E=vB$$

$$d_y=\frac{\Delta V}{vB}=\frac{12\times10^{-3}}{(3)(0.02)}=0.2\,\text{m}=20\,\text{cm}$$

$$d_z=\frac{18\times10^{-3}}{(3)(0.02)}=0.3\ \text{m}=30\,\text{cm}$$

به این ترتیب طول ضلع داده شده در مسئله $(25\,\text{cm})$ مربوط به d_x است. یعنی $d_x=25\,\text{cm}$.

بخش ۲۴-۶ ذره‌ی باردار در حرکت دایره‌ای

●۱۷- یک ذرهٔ آلفا $(q=+2e\,,\,m=4.00\,\text{u})$ در مسیری دایره‌ای به شعاع $4.50\,\text{cm}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی با $B=1.20\,\text{T}$ حرکت می‌کند. (الف) تندی ذره، (ب) دورهٔ تناوب چرخش آن، (پ) انرژی جنبشی آن و (ت) اختلاف پتانسیلی را که برای رسیدن به این انرژی توسط آن شتابدار شده است، محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

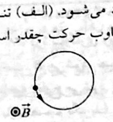
$$v=\frac{qrB}{m_\alpha}=\frac{2erB}{m_\alpha}=\frac{2(1.6\times10^{-19})(4.5\times10^{-2})(1.2)}{(4)(1.66\times10^{-27})}$$
$$=2.6\times10^{6}\ \text{m/s}$$

(ب) $$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2(3.14)(4.5\times10^{-2})}{2.6\times10^{6}}=1.09\times10^{-7}\ \text{s}$$

(پ) $$K_\alpha=\frac{1}{2}m_\alpha v^2=\left(\frac{1}{2}\right)(4)(1.66\times10^{-27})(2.6\times10^{6})$$
$$=2.24\times10^{-12}\ \text{J}$$

(ت) $$K=U=qV\Rightarrow 2.24\times10^{-12}=2(1.6\times10^{-19})V$$
$$\Rightarrow V=7\times10^{6}\ \text{V}$$

●۱۸- در شکل ۲۴-۳۵ ذره‌ای روی یک دایره در ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B=4.00\,\text{mT}$ وجود دارد حرکت می‌کند. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید انتخاب کنید). به این ذره نیروی مغناطیسی با بزرگی $3.20\times10^{-15}\,\text{N}$ وارد می‌شود. (الف) تندی ذره، (ب) شعاع دایره و (پ) دورهٔ تناوب حرکت چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

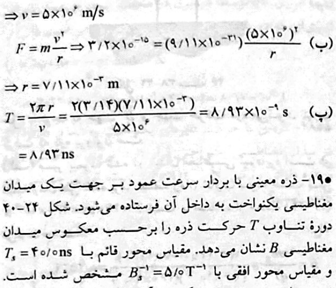
حل: (الف) با توجه به جهت B و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره الکترون است.

$$F=qvB\Rightarrow 3.2\times10^{-15}=(1.6\times10^{-19})v(4\times10^{-3})$$
$$\Rightarrow v=5\times10^{6}\ \text{m/s}$$

(ب) $$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow 3.2\times10^{-15}=(9.11\times10^{-31})\frac{(5\times10^{6})^2}{r}$$
$$\Rightarrow r=7.11\times10^{-3}\ \text{m}$$

(پ) $$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2(3.14)(7.11\times10^{-3})}{5\times10^{6}}=8.93\times10^{-9}\ \text{s}$$
$$=8.93\,\text{ns}$$

●۱۹- ذره معینی با بردار سرعت عمود بر جهت یک میدان مغناطیسی یکنواخت به داخل آن فرستاده می‌شود. شکل ۲۴-۴۰ دورهٔ تناوب T حرکت ذره را برحسب معکوس میدان مغناطیسی B نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $T_s=40.0\,\text{ns}$ و مقیاس محور افقی با $B_s^{-1}=5.0\,\text{T}^{-1}$ مشخص شده است. نسبت m/q جرم ذره به بزرگی بار آن چقدر است؟



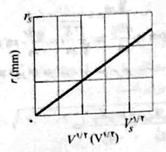
شکل ۲۴-۳۶ مسئلهٔ ۱۹

حل: از نمودار مشاهده می‌شود که در $B^{-1}=2\ (B=0.5)$ داریم $T=15\,\text{ns}$

$$T=\frac{2\pi m}{qB}\Rightarrow\frac{m}{q}=\frac{BT}{2\pi}=\frac{(0.5)(15\times10^{-9})}{2(3.14)}$$
$$=1.19\times10^{-9}\ \text{kg/c}$$

●۲۰- الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل V شتاب می‌گیرد و سپس وارد ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت می‌شود که در آن حرکت دایره‌ای یکنواختی انجام می‌گیرد. شکل ۲۴-۳۹ شعاع r این حرکت را برحسب $V^{1/2}$ به دست

می‌دهد. مقیاس محور عمودی $r_s=3.0\,\text{mm}$، و مقیاس محور افقی با $V_s^{1/2}=40.0\,\text{V}^{1/2}$ مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۷ مسئلهٔ ۲۰

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $r=2\,\text{mm}$ و $\sqrt{V}=40$ است.

$$K=eV\Rightarrow\frac{1}{2}m_ev^2=eV\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$m_e\frac{v^2}{r}=evB\Rightarrow B=\frac{m_ev}{er}=\frac{m_e}{er}\sqrt{\frac{2eV}{m_e}}=\sqrt{\frac{2m_eV}{er^2}}$$

با قرار دادن مقادیر مورد نظر خواهیم داشت

$$B=6.75\times10^{-2}\ \text{T}$$

●۲۱- SSM الکترونی با انرژی جنبشی $1.20\,\text{keV}$ دایره‌ای را در صفحهٔ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی می‌پیماید. شعاع مدار $25.0\,\text{cm}$ است. (الف) تندی الکترون، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی، (پ) بسامد چرخش و (ت) دورهٔ تناوب حرکت را پیدا کنید.

حل: (الف) $$K=\frac{1}{2}m_ev^2\Rightarrow\ v=\sqrt{\frac{2K}{m_e}}$$

$$v=\sqrt{\frac{2(1.2\times10^{3})(1.6\times10^{-19})}{(9.11\times10^{-31})}}=2.05\times10^{7}\ \text{m/s}$$

(ب) $$m_e\frac{v^2}{r}=evB\Rightarrow B=\frac{m_ev}{er}$$

$$B=\frac{(9.11\times10^{-31})(2.05\times10^{7})}{(1.6\times10^{-19})(25\times10^{-2})}=4.67\times10^{-4}\ \text{T}$$

(پ) $$v=rw=r2\pi f\Rightarrow f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{2.05\times10^{7}}{2(3.14)(25\times10^{-2})}$$
$$=1.31\times10^{-7}\ T$$

(ت) $$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{1.31\times10^{-7}}=7.63\times10^{-8}\ \text{s}$$

●۲۲- در یک آزمایش هسته‌ای پروتونی با انرژی جنبشی $1.0\,\text{MeV}$ در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. انرژی (الف) یک ذرهٔ آلفا $(q=+2e\,,\,m=4.0\,\text{u})$ و (ب) یک دوترون

$(q=+e\,,\,m=2.0\,u)$ چقدر باید باشد تا در همان مسیر دایره‌ای حرکت کنند؟

حل: (الف) $K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$m\frac{v^2}{r}=qvB \Rightarrow v=\frac{qBr}{m} \Rightarrow \sqrt{\frac{2K}{m}}=\frac{qBr}{m} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2mK}}{qB}$$

می‌خواهیم شعاع دوران دو ذره با هم برابر باشد، لذا می‌توان نوشت:

$$r_\alpha=r_p \Rightarrow \frac{m_\alpha K_\alpha}{q_\alpha^2}=\frac{m_p K_p}{q_p^2} \Rightarrow$$

$$K_\alpha=\left(\frac{mp}{m_\alpha}\right)\left(\frac{q_\alpha}{q_p}\right)^2 K_p=\left(\frac{1}{4}\right)(2)^2 K_p=K_p=1\ \text{MeV}$$

(ب) $$K_d=\left(\frac{mp}{m_d}\right)\left(\frac{q_d}{q_p}\right)^2 K_p=\left(\frac{1}{2}\right)(1)^2=\frac{K_p}{2}=0.5\ \text{MeV}$$

●**۲۳**- چه میدان مغناطیسی یکنواختی باید عمود بر باریکه‌ای از الکترون‌های متحرک با تندی $1.30\times10^6\,\text{m/s}$ اعمال شود تا الکترون‌ها در دایره‌ای به شعاع $0.350\,\text{m}$ حرکت کنند؟

حل:

$$B=\frac{m_e v}{er}=\frac{(9.11\times10^{-31})(1.3\times10^6)}{(1.6\times10^{-19})(0.35)}=2.11\times10^{-5}\ \text{T}$$

●**۲۴**- الکترونی از حالت سکون توسط اختلاف پتانسیل $350\,\text{V}$ شتاب می‌گیرد. الکترون سپس با سرعتی عمود بر میدان وارد میدان مغناطیسی یکنواختی (با بزرگی $200\,\text{mT}$) می‌شود. (الف) تندی الکترون و (ب) شعاع مسیر آن در میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

حل: (الف) $eV=\frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$

$$v=\sqrt{\frac{2(1.6\times10^{-19})(350)}{(9.11\times10^{-31})}}=1.11\times10^7\ \text{m/s}$$

(ب) $$m\frac{v^2}{r}=qvB \Rightarrow r=\frac{m_e v}{eB}=\frac{(9.11\times10^{-31})(1.11\times10^7)}{(1.6\times10^{-19})(200\times10^{-3})}$$

$$=3.16\times10^{-4}\ \text{m}$$

●**۲۵**- (الف) بسامد چرخش الکترونی با انرژی $100\,\text{eV}$ را در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $35.0\,\mu\text{T}$ پیدا کنید. (ب) اگر سرعت الکترون بر میدان مغناطیسی عمود باشد، شعاع مسیر آن را محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادلهٔ (۲۴-۱۸) داریم

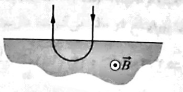
$$f=\frac{eB}{2\pi m_e}=\frac{(1.6\times10^{-19})(35\times10^{-6})}{2(3.14)(9.11\times10^{-31})}=9.78\times10^5\ \text{Hz}$$

(ب) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

$$r=\frac{m_e v}{eB}=\frac{\sqrt{2m_e K}}{eB}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times(9.11\times10^{-31})(100)(1.6\times10^{-19})}}{(1.6\times10^{-19})(35\times10^{-6})}=0.964\ \text{m}$$

●●**۲۶**- در شکل ۲۴-۳۸، ذرهٔ بارداری وارد ناحیه‌ای از یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شود، نصف دایره‌ای را طی می‌کند و سپس از آن ناحیه خارج می‌شود. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید تصمیم بگیرید). این ذره $130\,\text{ns}$ را در این ناحیه سپری می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر ذره با دو برابر انرژی جنبشی اولیه (در راستای همان مسیر) دوباره به میدان مغناطیسی برگردد، در این حرکت چه مدت زمان در میدان خواهد بود؟



شکل ۲۴-۳۸ مسئلهٔ ۲۶

حل: با توجه به جهت $\vec{B}$ و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره پروتون است.

(الف) مسیر پیموده شده در میدان مغناطیسی نیم‌دایره است در نتیجه زمان طی شده برابر نصف زمان تناوب بوده است پس $T=260\,\text{ns}=260\times10^{-9}\,\text{s}$ است. با استفاده از معادلهٔ (۲۴-۱۷) می‌توان نوشت:

$$B=\frac{2\pi m_p}{qT}=\frac{2(3.14)(1.67\times10^{-27})}{(1.6\times10^{-19})(260\times10^{-9})}=0.252\text{T}$$

(ب) در معادلهٔ (۲۴-۱۷)، m ، q و B ثابت می‌مانند در نتیجه T نیز ثابت می‌ماند که ثابت بودن T بیانگر این است که زمان عبور نیز ثابت است.

●●**۲۷**- یک طیف‌سنج جرم تجارتی (شکل ۲۴-۱۲) برای جداکردن یون‌های اورانیوم با جرم $3.92\times10^{-25}\,\text{kg}$ و بار الکتریکی $3.20\times10^{-19}\,\text{C}$ از نمونه‌های مربوط به کار می‌رود. یون‌ها توسط اختلاف پتانسیل $100\,\text{kV}$ شتاب می‌گیرند و سپس وارد میدان مغناطیسی یکنواختی می‌شوند و در مسیری به شعاع $1.00\,\text{m}$ خم می‌شوند. یون‌ها پس از انحراف به اندازهٔ 180° و عبور از شکافی به پهنای $1.00\,\text{mm}$ و ارتفاع $1.00\,\text{cm}$ در ظرفی جمع‌آوری می‌شوند. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی (عمودی) جداکننده چقدر است؟ اگر این دستگاه برای جدا کردن $100\,\text{mg}$ ماده در ساعت به کار رود، (ب) جریان یون‌های مورد نظر در دستگاه و (پ) انرژی گرمایی تلف شده را در مدت $1.00\,\text{h}$ محاسبه کنید.

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۴-۳ داریم

$$m=\frac{B^2qx^2}{8V} \Rightarrow B=\sqrt{\frac{8Vm}{qx^2}}$$

که در آن $x=2r=2m$ است و با قرار دادن سایر مقادیر داریم $B=0.495T$.

(ب) چنانچه تعداد یون‌هایی که در واحد زمان جدا می‌شدند را N در نظر بگیریم جریان برابر $i=qN$ می‌شود و از طرف دیگر اگر مقدار جرمی که در واحد زمان جدا می‌شود را نیز $M=mN$ در نظر بگیریم که m جرم یک یون است، در نتیجه خواهیم داشت

$$M=\frac{100\times10^{-6}}{3600}=2.78\times10^{-8}\ \text{kg/s}$$

و $N=\frac{M}{m}$ را در رابطه $i=qN$ قرار می‌دهیم، داریم

$$i=q\frac{M}{m}=(3.2\times10^{-19})\frac{2.78\times10^{-8}}{3.92\times10^{-25}}=2.27\times10^{-2}\ \text{A}$$

(پ) انرژی qV توسط هر یون در محفظه ایجاد می‌شود بنابراین انرژی‌ای که در بازه زمانی Δt ایجاد می‌شود برابر است با

$$U=NqV\Delta t=\frac{i}{q}qV\Delta t=iV\Delta t$$

$$=(2.27\times10^{-2})(100\times10^3)(3600)=8.17\times10^6\ \text{J}$$

●●**۲۸**- ذره‌ای با حرکت دایره‌ای یکنواخت به شعاع $26.1\,\mu\text{m}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره دارای بزرگی $1.60\times10^{-17}\,\text{N}$ است. انرژی جنبشی ذره چقدر است؟

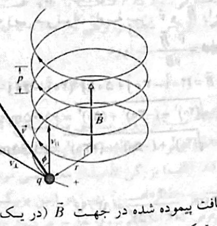
حل: $F=m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mv^2=rF$

$$F=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}rf=\left(\frac{1}{2}\right)(26.1\times10^{-6})(1.6\times10^{-17})$$

$$=2.1\times10^{-22}\ \text{J}$$

●●**۲۹**- الکترونی در یک مسیر مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0.300\,\text{T}$ حرکت می‌کند. گام مسیر $6.00\,\mu\text{m}$ و بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون برابر با $2.00\times10^{-15}\,\text{N}$ است. تندی الکترون چقدر است؟

حل:



مسافت پیموده شده در جهت $\vec{B}$ (در یک گام P) $P=v_{\parallel}T$ است که با استفاده از معادله ۲۴-۱۷، $(T=2\pi m/(qB))$ خواهیم داشت

$$v_{\parallel}=\frac{PeB}{2\pi m_e}=\frac{(6\times10^{-6})(1.6\times10^{-19})(0.3)}{2(3.14)(9.11\times10^{-31})}$$

$$=5.03\times10^4\ \text{m/s}$$

برای $v_{\perp}$ می‌توان از رابطه نیرو استفاده کرد

$$F=ev_{\perp}B \Rightarrow 2\times10^{-15}=(1.6\times10^{-19})v_{\perp}(0.3)$$

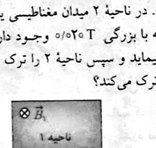
$$\Rightarrow v_{\perp}=4.17\times10^4\ \text{m/s}$$

در نتیجه تندی برابر است با

$$v=\sqrt{v_{\perp}^2+v_{\parallel}^2}=\sqrt{(4.17\times10^4)^2+(5.03\times10^4)^2}$$

$$=6.53\ \text{m/s}$$

●●**۳۰**- در شکل ۲۴-۳۹، الکترونی با انرژی جنبشی اولیهٔ $4.0\,\text{keV}$ در لحظهٔ $t=0$ وارد ناحیهٔ ۱ می‌شود. در آن ناحیه میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0.010\,\text{T}$ و به طرف داخل صفحه برقرار است. الکترون یک نیم‌دایره را طی می‌کند و سپس از ناحیهٔ ۱ خارج و به طرف ناحیهٔ ۲ که $25.0\,\text{cm}$ با آن فاصله دارد حرکت می‌کند. یک اختلاف پتانسیل الکتریکی $\Delta V=2000\,\text{V}$ در دو سر این فاصله برقرار است با قطبیتی که تندی الکترون‌ها را به طور یکنواخت با عبور از این فاصله افزایش می‌دهد. در ناحیهٔ ۲ میدان مغناطیسی یکنواختی به طرف خارج از صفحه با بزرگی $0.020\,\text{T}$ وجود دارد. الکترون یک نیم‌دایره را می‌پیماید و سپس ناحیهٔ ۲ را ترک می‌کند. در چه زمان t آنجا را ترک می‌کند؟



شکل ۲۴-۳۹ مسئلهٔ ۳۰

حل: از معادله ۲۴-۱۷ می‌توان استفاده کرد که زمان تناوب $T=\frac{2\pi m_e}{eB}$ را به دست می‌دهد. بنابراین زمان کلی برابر است با

$$\left(\frac{T}{2}\right)_1+t_{\text{گاف}}+\left(\frac{T}{2}\right)_2=\frac{\pi m_e}{e}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right)+t_{\text{گاف}}$$

و زمان سپری شده در گاف را نیز می‌توان از معادله $x=1/2at^2+v_0t$ به دست آورد.

$$d=\frac{1}{2}\frac{e\Delta V}{m_e d}t^2+\sqrt{\frac{2k_0}{me}}t$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده به یک معادله درجه دوم برای t می رسیم که با حل آن خواهیم داشت $t=t_{\text{گاف}}=5.96\times10^{-9}\,s$.

در نتیجه زمان کل برابر است با

$$\frac{\pi(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})}\left(\frac{1}{0/01}+\frac{1}{0/02}\right)+5/96\times10^{-9}$$

$$=8/7\times10^{-9}\ \mathrm{s}=8/7\ \mathrm{ns}$$

۳۱●●- نوع خاصی از ذرهٔ بنیادی با تبدیل به یک الکترون e^- و یک پروتون e^+ واپاشیده می‌شود. فرض کنید ذره‌ای که واپاشیده می‌شود در حالت سکون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی ۳/۵۳mT قرار داشته و e^- و e^+ از نقطهٔ واپاشی در مسیرهایی که در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ قرار دارند از هم دور شوند. چه مدت پس از واپاشی e^- و e^+ برخورد می‌کنند؟

حل: هر کدام از ذرات مسیر دایره‌ای یکسان ولی در جهت مخالف را پیموده و سپس با هم برخورد می‌کنند پس زمان برخورد آنها نصف زمان تناوب است و با استفاده از معادله (۲۴-۱۷) داریم

$$T=\frac{2\pi m}{qB}=\frac{2\pi(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})(3/53\times10^{-3})}=1/014\times10^{-8}\ \mathrm{s}$$

و زمان برخورد آنها برابر است با

$$t=\frac{T}{2}=0/507\times10^{-8}\ s=5/07\ \mathrm{ns}$$

۳۲●●- چشمه‌ای الکترونی را با تندی $v=1/5\times10^7\ \mathrm{m/s}$ به میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B=1/0\times10^{-3}\ \mathrm{T}$ پرتاب می‌کند. سرعت الکترون با جهت میدان مغناطیسی زاویهٔ $\theta=10^\circ$ می‌سازد. فاصلهٔ d از نقطهٔ پرتاب که در آن الکترون بعداً خط میدانی را که از نقطهٔ پرتاب می‌گذرد قطع می‌کند پیدا کنید.

حل: شکل ۲۴-۱۱ کتاب را در نظر می‌گیریم. بسامد الکترون برابر است با $f=eB/2\pi m_e$ و مولفه سرعت الکترون در جهت میدان برابر است با $v_\parallel=v\cos\theta$. بنابراین مسافت طی شده را که با توجه به مسئله می‌توان همان گام در نظر گرفت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$d=v_\parallel T=\frac{v_\parallel}{f}=\frac{(v\cos\theta)(2\pi m_e)}{eB}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شد خواهیم داشت $d=0/53\ \mathrm{m}$.

۳۳●●- WWW SSM پوزیترونی با انرژی جنبشی ۲/۰۰keV به داخل میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۱۰۰T پرتاب می‌شود، به طوری که بردار سرعت آن با $\vec{B}$ زاویهٔ ۸۹/۰° می‌سازد. (الف) دورهٔ تناوب، (ب) گام p و (پ) شعاع r مسیر مارپیچی آن را پیدا کنید.

حل: (الف) شکل ۲۴-۱۱ کتاب را ببینید. اگر v تندی پوزیترون باشد آنگاه $v_\perp=v\sin\phi$ مؤلفه عمود بر میدان مغناطیسی است. چنانچه شعاع مسیر را r بنامیم از قانون دون نیوتون داریم

$$eBv=m_e\frac{v_\perp^2}{r}\Rightarrow r=\frac{m_e v_\perp}{eB}$$

برای زمان تناوب داریم

$$T=\frac{2\pi r}{v_\perp}=\frac{2\pi}{v_\perp}\left(\frac{m_e v_\perp}{eB}\right)=\frac{2\pi m_e}{eB}\ ,$$

که در واقع همان معادله (۲۴-۱۷) است.

$$T=\frac{2(3/14)(9/11\times10^{-31})}{(1/6\times10^{-19})(0/1)}=3/58\times10^{-10}\ \mathrm{s}$$

(ب) گام مسافتی است که ذره در طی زمان یک دوره تناوب در امتداد میدان مغناطیسی طی می‌کند. پس $P=v_\parallel T$ است که $v_\parallel=v\cos\phi$ و تندی v را نیز می‌توانیم از انرژی جنبشی به دست آوریم

$$K=\frac{1}{2}m_e v^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2k}{m_e}}$$

$$v=\sqrt{\frac{2(2\times10^3)(1/6\times10^{-19})}{(9/11\times10^{-31})}}=2/65\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

لذا خواهیم داشت:

$$P=v_\parallel T=vT\cos\phi=(2/65\times10^7)(3/58\times10^{-10})\cos89^\circ$$

$$=1/66\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

(پ)

$$v=r\omega=r\frac{2\pi}{T}\Rightarrow r=\frac{vT}{2\pi}=\frac{(2/65\times10^7)(3/58\times10^{-10})}{2(3/14)}$$

$$=1/51\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

۳۴●●- الکترونی روی مسیری مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی که با رابطهٔ $\vec{B}=(20\hat{i}-50\hat{j}-30\hat{k})\mathrm{mT}$ داده می‌شود حرکت می‌کند. در زمان $t=0$ سرعت الکترون با رابطهٔ $\vec{v}=(20\hat{i}-30\hat{j}+50\hat{k})\mathrm{m/s}$ داده می‌شود. (الف) زاویهٔ ϕ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟ سرعت الکترون نسبت به زمان تغییر می‌کند. آیا (ب) تندی آن و (پ) زاویهٔ ϕ نسبت به زمان تغییر می‌کند؟ (ت) شعاع مسیر مارپیچی چقدر است؟

حل: (الف) از رابطه زیر می‌توان زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را به دست آورد.

$$\cos\phi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{vB}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{B}=(20\hat{i}-30\hat{j}+50\hat{k})\cdot(20\hat{i}-50\hat{j}-30\hat{k})=400$$

$$v=\sqrt{(20)^2+(-30)^2+(50)^2}=61/65\mathrm{m/s}$$

$$B=\sqrt{(20)^2+(-50)^2+(-30)^2}=61/65\mathrm{mT}$$

در نتیجه داریم:

$$\phi=\cos^{-1}\frac{400}{(61/65)^2}=83/96^\circ$$

(ب) خیر. نیروی مغناطیسی ثابت فقط جهت حرکت ذره را تغییر می‌دهد و مقدار تندی و انرژی جنبشی را تغییر نمی‌دهد.

(پ) مؤلفه‌های سرعت $v_\parallel$ و $v_\perp$ هر دو ثابت هستند لذا ϕ ثابت می‌ماند.

(ت) داریم $r=mv_\perp/eB$ که $v_\perp$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$v_\perp=v\sin\phi=(61/65)\sin(83/96^\circ)=61/3\ \mathrm{m/s}$$

$$r=\frac{m_e v_\perp}{eB}=\frac{(9/11\times10^{-31})(61/3)}{(1/6\times10^{-19})(61/65\times10^{-3})}$$

$$=5/66\times10^{-9}\ \mathrm{m}=5/66\mathrm{nm}$$

بخش ۲۴-۷ سیکلوترون‌ها و سینکروترون‌ها

۳۵●●- پروتونی در یک سیکلوترون با شروع از حالت تقریباً سکون در مرکز، در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی که از شکاف بین دی‌ها می‌گذرد، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دی‌ها ۲۰۰V است. (الف) با هر بار عبور از شکاف انرژی جنبشی آن چقدر افزایش می‌یابد؟ (ب) وقتی که ۱۰۰ بار از شکاف بگذرد انرژی جنبشی آن چقدر است؟ فرض کنید r_{100} شعاع مسیر دایره‌ای پروتون در هنگام کامل‌شدن دور صدم و موقع ورود به یک دی، و r_{101} شعاع بعدی موقع ورود به دی در زمان بعدی باشد، (پ) وقتی شعاع از r_{100} به r_{101} تغییر کند درصد افزایش شعاع چقدر است؟ یعنی

$$\text{درصد افزایش}=\frac{r_{101}-r_{100}}{r_{100}}\times100\ \text{(درصد)}$$

چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی جنبشی در هر عبور برابر خواهد بود با:

(ب) $\Delta K=\Delta U=q\Delta V=200eV=3/2\times10^{-17}\ \mathrm{J}$

(پ) $\Delta K=n\Delta K=(100)(200)=20\ \mathrm{keV}$

از دو رابطه $n(200)=\frac{1}{2}mv^2$ و $r=mv/qB$ ، داریم:

$$r=\frac{m_p}{eB}\sqrt{\frac{2n(200)}{m_p}}$$

مشاهده می‌شود که r متناسب با $\sqrt{n}$ است. بنابراین می‌توان درصد افزایش شعاع را وقتی از $n=100$ به $n=101$ می‌رود از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{\sqrt{100}}=0/00499\ \text{یا}\ 0/499\%$$

۳۶●●- سیکلوترونی با دی به شعاع ۵۳/۰ cm در بسامد نوسانگر برابر با ۱۲/۰ MHz برای شتاب دادن به پروتون‌ها کار می‌کند. (الف) بزرگی B میدان مغناطیسی مورد نیاز برای رسیدن به تشدید چقدر است؟ (ب) در این بزرگی، انرژی جنبشی پروتونی که از سیکلوترون خارج می‌شود چقدر است؟ اکنون فرض کنید که $B=1/57\ \mathrm{T}$ باشد. (پ) حالا چه بسامد نوسانگری برای رسیدن به تشدید لازم است؟ (ت) در این بسامد، انرژی جنبشی پروتون خارج شده چقدر است؟

حل: (الف)
$$m\frac{v^2}{r}=quB\Rightarrow mv=qrB$$

اما $v=r\omega=r(2\pi f)$، لذا داریم:

$$mr(2\pi f)=qrB\Rightarrow B=\frac{2\pi mf}{q}$$

$$B=\frac{(2\pi)(1/67\times10^{-27})(12\times10^6)}{1/6\times10^{-19}}=0/787\ \mathrm{T}$$

(ب) $v=r(2\pi f)=(2\pi)(0/53)(12\times10^6)=3/99\times10^7\ \mathrm{m/s}$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\left(\frac{1}{2}\right)(1/67\times10^{-27})(3/99\times10^7)^2 1/33\times10^{-12}\ \mathrm{J}$$

(پ)
$$B=\frac{2\pi mf}{q}\Rightarrow1/57=\frac{(2\pi)(1/67\times10^{-27})}{1/6\times10^{-19}}$$

$$\Rightarrow f=2/4\times10^7\ \mathrm{Hz}$$

(ت) $v=r(2\pi f)=(0/53)(2\pi)(2/4\times10^7)=7/99\times10^7\ \mathrm{m/s}$

$$K=1/2\,mv^2=(1/2)(1/67\times10^{-27})(7/99\times10^7)^2$$

$$=5/33\times10^{-12}\ \mathrm{J}$$

۳۷●●- طول کل مسیر پیموده شده توسط یک دوترون در سیکلوترونی با شعاع ۳۵ cm با بسامد ۱۲ MHZ کار می‌کند را در ضمن (کل) فرایند شتاب‌گیری محاسبه کنید. فرض کنید که پتانسیل شتاب دهنده میان دی‌ها ۸۰kV باشد

حل: با توجه به مسئله نمونهٔ ۲۴-۵ انرژی جنبشی الکترون در موقع خروج برابر $K=2/7\times10^{-12}\ \mathrm{J}$ است و انرژی که در هر دور شتاب گرفتن qV است که چون در هر دور دوبار شتاب می‌گیرد، انرژی کسب شده در هر دور برابر است با

$$U=2qV=2(1/6\times10^{-19})(80\times10^3)=2/56\times10^{-14}\ \mathrm{J}$$

در نتیجه می‌توان تعداد دوری را که دوترون برای رسیدن به این انرژی طی می‌کند را به دست آورد.

$$N=\frac{K}{U}=\frac{2/7\times10^{-12}}{2/56\times10^{-14}}=105/5\quad\text{دور}$$

با استفاده از انرژی میانگین می‌توان شعاع میانگین دوران را به دست آورد.

$$\bar{K}=\frac{0+2/7\times10^{-12}}{2}=1/35\times10^{-12}\ \mathrm{J}$$

$$\bar{K}=\frac{1}{2}m\bar{v}^2\Rightarrow\bar{v}=\sqrt{\frac{2\bar{K}}{m}}=\sqrt{\frac{2(1/35\times10^{-12})}{3/34\times10^{-27}}}$$

$$=2/84\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

$$m\frac{\bar{v}^2}{\bar{r}}=q\bar{v}B\Rightarrow\bar{r}=\frac{m\bar{v}}{qB}=\frac{(3/34\times10^{-27})(2/84\times10^7)}{(1/6\times10^{-19})(1/57)}$$

$$=0/37\ \mathrm{m}$$

بنابراین کل مسافت تقریبی پیموده شده برابر است با

$$S = N(2\pi\bar{r}) = (105.5)(2)(3.14)(0.37) = 2.45\times10^{2}\ \text{m}$$

●●۳۸- در یک سیکلوترون مشخص پروتون در دایره‌ای به شعاع ۰/۵۰۰m حرکت می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی ۱/۲۰T است. (الف) بسامد نوسانگر چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی پروتون برحسب الکترون ولت چقدر است؟

حل: (الف) از معادله (۲۴-۲۴) داریم

$$f_{osc} = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(1.2)}{2\pi(1.67\times10^{-27})} = 1.83\times10^{7}\ \text{Hz}$$

(ب)

$$m\frac{v^2}{r} = quB \Rightarrow v = \frac{qrB}{m}$$

$$v = \frac{(1.6\times10^{-19})(0.5)(1.2)}{1.67\times10^{-27}} = 5.75\times10^{7}\ \text{m/s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(1.67\times10^{-27})(5.75\times10^{7})^2$$

$$= 2.76\times10^{-12}\ J = 17.3\ \text{MeV}$$

بخش ۲۴-۸ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

●۳۹- SSM یک خط قدرت افقی از جنوب به شمال حامل جریان ۵۰۰۰A است. میدان مغناطیسی زمین ($60.0\ \mu T$) به طرف شمال است و نسبت به افق به اندازهٔ °۷۰/۰ به پایین تمایل دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ۱۰۰m از سیم ناشی از میدان زمین را پیدا کنید.

حل: (الف) $F = iLB\sin\theta = (500)(100)(60\times10^{-6})\sin 70^\circ$

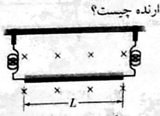
$$= 28.2\ \text{N}$$

(ب) جهت نیرو نیز از قاعده دست راست به سوی غرب است.

●۴۰- سیمی به طول ۱/۸۰m حامل جریان ۱۳/۰A است و با میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 1.50\ \text{T}$ زاویه °۳۵/۰ می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را محاسبه کنید.

حل: $F = iLB\sin\theta = (13)(1.8)(1.5)\sin 35^\circ = 20.13\ \text{N}$

●۴۱- ILW یک سیم ۱۳/۰ گرمی به طول $L = 62.0\ \text{cm}$ توسط دو رابط قابل انعطاف در میدان مغناطیسی یکنواختی آویزان است (شکل ۲۴-۴۰). (الف) بزرگی و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان مورد نیاز برای حذف نیروی کشش در رابطهای نگهدارنده چیست؟



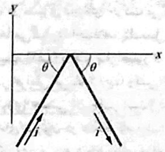
شکل ۲۴-۴۰ مسئلهٔ ۴۱

حل: (الف) نیروی مغناطیسی باید با نیروی گرانشی برابر باشد تا اثر وزن خنثی شود. یعنی

$$iLB = mg \Rightarrow i = \frac{mg}{LB}$$

$$i = \frac{(13\times10^{-3})(9.8)}{(0.62)(0.44)} = 0.467\ \text{A}$$

●۴۲- سیم خمیدهٔ نشان داده شده در شکل ۲۴-۴۱ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. طول هر قسمت مستقیم ۲/۰m و با محور x زاویهٔ $\theta = 60^\circ$ می‌سازد و حامل جریان ۲/۰A است. اگر میدان مغناطیسی با (الف) $4.0\hat{k}\ \text{T}$ و (ب) $4.0\hat{i}\ \text{T}$ داده شود، نیروی مغناطیسی خالص وارد بر سیم برحسب بردار یکه چگونه است؟



شکل ۲۴-۴۱ مسئلهٔ ۴۲

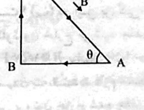
حل: (الف) از تقارن در می‌یابیم که مولفهٔ x نیروی کل است. چون میدان در جهت $\hat{k}$ است از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیرو در هر دو بخش در جهت $-\hat{j}$ است. پس نیروی کل حاصل بر روی دو بخش برابر است با

$$F_y = 2(iLB)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2(2)(2)(4)\sin 30^\circ$$

$$= 16N \quad \text{یا} \quad \vec{F}_{\text{کل}} = -16\hat{j}\ \text{N}$$

(ب) $B = 4\hat{i}T$، در این حالت از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیروی وارد برسیم سمت چپ در جهت $-\hat{k}$ و برای سیم سمت راست در جهت $+\hat{k}$ است و چون بزرگی آنها است لذا نیروی کل برابر صفر خواهد شد.

●۴۳- یک حلقهٔ جریان تک دور که از آن جریان ۴/۰۰A می‌گذرد به شکل یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۵۰/۰، ۱۲۰ و ۱۳۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۷۵/۰mT که جهت آن موازی با جریان در ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری حلقه است قرار دارد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر (الف) ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری، (ب) ۵۰/۰ سانتی‌متری و (پ) ۱۲۰ سانتی‌متری چقدر است؟



حل: (الف) میدان موازی ضلع CA است لذا نیروی بر این ضلع به طول ۱۳۰cm وارد نمی‌شود.

(ب) نیروی وارد بر ضلع BA برابر است با

$$\vec{F}_{AB} = i[AB(-\hat{i})\times(B\cos\theta\hat{i} - B\sin\theta\hat{j})]$$

$$= i(AB)B\sin\theta\hat{k} = (4)(0.5)(75\times10^{-3})\left(\frac{120}{130}\right)\hat{k}$$

$$= 0.138\hat{k}\ \text{N}$$

(پ)

$$\vec{F}_{BC} = i[BC(\hat{j})\times(B\cos\theta\hat{i} - B\sin\theta\hat{j})]$$

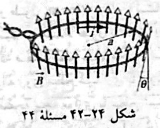
$$= -i(BC)B\cos\theta\hat{k} = -(4)(1.20)(75\times10^{-3})\left(\frac{50}{130}\right)\hat{k}$$

$$= 0.138\hat{k}\ \text{N}$$

(ت) نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است

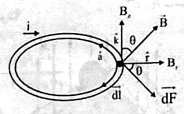
$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CA} = 0$$

●●۴۴- شکل ۲۴-۴۲ یک حلقه سیم به شعاع $a = 1.8\ \text{m}$ را نشان می‌دهد که بر جهت کلی یک میدان مغناطیسی واگرا و با تقارن شعاعی عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در همه جای حلقه یکسان و مساوی $B = 3.4\ \text{mT}$ است و جهت آن در همه جای حلقه با خط عمود بر صفحهٔ حلقه زاویهٔ $\theta = 20^\circ$ می‌سازد. سیم‌های رابط پیچیده شده اثری در مسئله ندارند. اگر از حلقه جریان $i = 4.6\ \text{mA}$ عبور کند، بزرگی و جهت نیرویی را که میدان بر حلقه وارد می‌کند پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۲ مسئلهٔ ۴۴

حل:



عنصر $d\vec{l}$ از حلقه را در نظر می‌گیریم. نیروی $d\vec{F}$ را به دو مؤلفه افقی $dF\cos\theta$ و قائم $dF\sin\theta$ تجزیه می‌کنیم. بنا به تقارن برآیند نیروی افقی وارد بر میله صفر است و فقط نیروی برآیند قائم بر حلقه اثر می‌کند

$$dF = idlB\sin 90^\circ = idlB$$

$$F_y = dF\sin\theta = iB\sin\theta\int_0^{2\pi a} dl = iB\sin\theta(2\pi a)$$

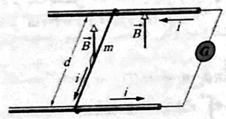
که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $F_y = 6\times10^{-7}\ \text{N}$ که عمود بر سطح حلقه و روبه پایین است.

●۴۵- سیمی به طول ۵۰/۰cm حامل جریان ۰/۵۰۰A در جهت مثبت محور x در میدان مغناطیسی $\vec{B} = (3.00\ \text{mT})\hat{j} + (10.0\ \text{mT})\hat{k}$ است. برحسب بردار یکه، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چیست؟

حل: $\vec{F} = i\vec{L}\times\vec{B} = (0.5)(0.5\hat{i})\times(3\times10^{-3}\hat{j} + 10\times10^{-3}\hat{k})$

$$= (-2.5\times10^{-3}\hat{j} + 0.75\times10^{-3}\hat{k})\ \text{N}$$

●●۴۶- در شکل ۲۴-۴۳، یک سیم فلزی به جرم $m = 24.1\ \text{mg}$ می‌تواند روی دو ریل موازی افقی به فاصلهٔ $d = 2.56\ \text{cm}$ از یکدیگر و با اصطکاک ناچیز بلغزد. این دستگاه در میدان مغناطیسی قائم یکنواختی با بزرگی ۵۶/۳ mT واقع است. در لحظهٔ $t = 0$، وسیلهٔ G به ریل‌ها وصل می‌شود که در سیم و ریل‌ها جریان ثابت $i = 9.13\ \text{mA}$ را ایجاد می‌کند (حتی در وقتی که سیم در حرکت است). در $t = 61.1\ \text{ms}$ (الف) تندی و (ب) جهت حرکت (چپ یا راست) سیم را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۳ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف)

$$F = iLB = (9.13\times10^{-3})(2.56\times10^{-2})(56.3\times10^{-3})$$

$$= 1.32\times10^{-5}\ \text{N}$$

$$F = ma \Rightarrow 1.32\times10^{-5} = (24.1\times10^{-6})a \Rightarrow a = 0.548\ \text{m/s}^2$$

$$v = at + v_0 = (0.548)(61.1\times10^{-3}) + 0 = 0.0334\ \text{m/s}$$

(ب) جهت نیرو و در نتیجه حرکت سیم به سمت چپ است.

●●●۴۷- GO یک میلهٔ مسی به جرم ۱/۰kg روی دو ریل افقی به فاصلهٔ ۱/۰m از یکدیگر قرار دارد و حامل جریان ۵۰A از یک ریل به ریل دیگر است. ضریب اصطکاک استاتیک میان میله و ریل‌ها ۰/۶۰ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به قائم) کمترین میدان مغناطیسی که میله را در آستانهٔ لغزش قرار می‌دهد چقدر است؟

حل: (الف) و (ب) برای اینکه میله به حرکت درآید باید مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی بر نیروی اصطکاک غلبه کند. نیروهای وارد بر میله عبارتند از نیروی مغناطیسی F، نیروی وزن، نیروی عمودی سطح رو به بالای N و نیروی اصطکاک f. در آستانهٔ حرکت $f = \mu_s N$ است.

$$\sum F_x = 0 \quad F\cos\theta - f = 0 \Rightarrow F\cos\theta - \mu_s N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F\sin\theta + N - my = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$$

لذا خواهیم داشت:

$$F\cos\theta-\mu_s(mg-F\sin)=۰\Rightarrow F\frac{\mu_s mg}{\mu_s\sin\theta+\cos\theta}$$

از طرف دیگر $F=iLB$ است در نتیجه داریم:

$$B=\frac{\mu_s mg}{iL(\mu_s\sin\theta+\cos\theta)}$$

حال شرط کمینه بودن B نسبت به θ را می‌نویسیم

$$\frac{dB}{d\theta}=۰\Rightarrow\frac{-\mu_s mg(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{iL(\mu_s\sin\theta+\cos\theta)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\mu_s=۰/۶\Rightarrow\theta=۳۱^\circ$$

$$B_{min}=\frac{(۰/۶)(۱)(۹/۸)}{(۵۰)(۱)(۰/۶\sin ۳۱^\circ+\cos ۳۱^\circ)}=۰/۱\,T$$

●●●۴۸- رسانای دراز صلبی که در امتداد محور x قرار دارد در جهت منفی x حامل جریان $۵/۰\,A$ است. میدان مغناطیسی موجود $\vec{B}$ با رابطهٔ $\vec{B}=۳/۰\hat{i}+۸/۰x^۲\hat{j}$ داده می‌شود که x برحسب متر و B برحسب میلی تسلاست. برحسب بردار یکه، نیروی وارد بر یک بخش $۲/۰$ متری این رسانا را که میان $x=۱/۰m$ و $x=۳/۰m$ قرار دارد پیدا کنید.

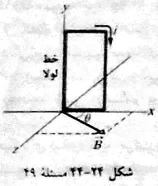
حل:

$$d\vec{F}=i\,\vec{dl}\times\vec{B}=i(-dx\hat{i})\times(۳\hat{i}+۸x^۲\hat{j})\times۱۰^{-۳}=-۰/۰۴x^۲dx\hat{k}$$

$$F=-۰/۰۴\int_۱^۳x^۲dx\hat{k}=-۰/۰۳۵\hat{k}\,N$$

بخش ۲۴-۹ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

●۴۹- SSM شکل ۲۴-۴۴ یک پیچهٔ مستطیل شکل را با ۲۰ دور سیم به ابعاد $۱۰cm$ در $۵/۰cm$ نشان می‌دهد. این پیچه حامل جریان $۰/۱۰A$ است و در یک طولش لولا شده است. پیچه در صفحهٔ xy قرار دارد و با جهت میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $۰/۵۰T$ زاویهٔ $\theta=۳۰^\circ$ می‌سازد. برحسب بردار یکه، گشتاور نیروی وارد بر پیچه نسبت به خط لولا چیست؟



شکل ۲۴-۴۴ مسئلهٔ ۴۹

حل: از معادله ۲۴-۳۷ داریم $\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$ که در آن

$$\vec{\mu}=-NiA\hat{k}=-(۲۰)(۰/۱)(۰/۰۵)(۰/۰۱)\hat{k}=-۱\times۱۰^{-۴}\hat{k}$$

و

$$\vec{B}=B\cos\theta\hat{i}+B\sin\theta\hat{k}=(۰/۵)\cos۳۰^\circ\hat{i}+(۰/۵)\sin۳۰^\circ\hat{k}$$

$$=۰/۴۳\hat{i}+۰/۲۵\hat{k}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau}=(-۱\times۱۰^{-۴}\hat{k})\times(۰/۴۳\hat{i}+۰/۲۵\hat{k})$$

$$=-۴/۳\times۱۰^{-۵}\hat{j}\;N\cdot m$$

●●۵۰- الکترونی با تندی $۲/۱۹\times۱۰^۶m/s$ روی دایره‌ای به شعاع $r=۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}m$ حرکت می‌کند. این مسیر دایره‌ای را به صورت یک حلقهٔ جریان با جریان ثابت برابر با نسبت بزرگی بار الکترون به دورهٔ تناوب حرکت در نظر بگیرید. اگر دایره در میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B=۷/۱۰\,mT$ قرار گیرد، بیشینهٔ بزرگی ممکن گشتاور نیروی ایجاد شده توسط میدان روی حلقه چقدر است؟

حل: داریم $T=\frac{۲\pi r}{v}$ و

$$i=\frac{q}{t}=\frac{q}{T}=\frac{q}{۲\pi r}$$

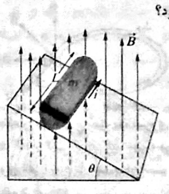
$$\tau_{max}=\left|\vec{\mu}\times\vec{B}\right|_{max}=\mu B=i\pi r^۲B=\frac{qv}{۲\pi r}\pi r^۲B$$

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}qvrB$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲/۱۹\times۱۰^۶)(۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱})(۷/۱\times۱۰^{-۳})$$

$$=۶/۵۸\times۱۰^{-۲۶}N\cdot m$$

●●۵۱- شکل ۲۴-۴۵ یک استوانهٔ چوبی به جرم $m=۰/۲۵۰kg$ و طول $L=۰/۱۰۰m$ را نشان می‌دهد که $N=۱۰/۰$ دور سیم در امتداد طول به دور آن پیچیده شده است، به طوری که صفحهٔ پیچهٔ سیم محور استوانه را شامل می‌شود. این استوانه روی سطح شیبداری با زاویهٔ θ نسبت به راستای افقی، با صفحهٔ پیچه موازی با سطح شیبدار رها می‌شود. اگر بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۵۰۰T$ باشد، کمترین جریان در پیچه باید چقدر باشد تا مانع از غلتیدن استوانه به طرف پایین شود؟



شکل ۲۴-۴۵ مسئلهٔ ۵۱

حل: از مکانیک و مبحث غلتش می‌دانیم که برای غلتش وجود اصطکاک ایستایی لازم است که در اینجا نیروی اصطکاک گشتاور نیروی $\vec{r}\times\vec{f}_s$ را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر یک تاب حامل جریان داریم که حول محور در یک میدان مغناطیسی یکنواخت می‌چرخد و گشتاور نیروی $\vec{\mu}\times\vec{B}$ را داریم که این دو گشتاور نیرو باید یکدیگر را خنثی کنند، یعنی:

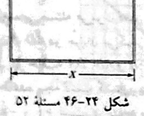
$$\vec{\mu}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s\Rightarrow Ni\vec{A}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s$$

و از

$$Ni(۲rL)B\sin\theta=rf_s=r(mg\sin\theta)$$

$$\Rightarrow i=\frac{mg}{۲NLB}=\frac{(۰/۲۵)(۹/۸)}{۲(۱۰)(۰/۱)(۰/۵)}=۲/۴۵\,A$$

●●۵۲- در شکل ۲۴-۴۶ حلقهٔ مستطیل شکلی که حامل جریان است در صفحهٔ میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $۰/۰۴۰T$ قرار دارد. این حلقه شامل یک دور سیم رسانای قابل انعطاف است که دور پایه‌ای قابل انعطاف پیچیده شده است به طوری که ابعاد مستطیل می‌تواند تغییر کند (طول کل سیم تغییر نمی‌کند).وقتی طول لبهٔ x تقریباً از صفر تا بیشینهٔ مقدار آن برابر $۴/۰cm$ تغییر کند، بزرگی گشتاور نیروی τ وارد بر حلقه تغییر می‌کند. بیشینهٔ مقدار τ برابر با $۴/۸۰\times۱۰^{-۸}N$ است. جریان در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۶ مسئلهٔ ۵۲

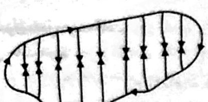
حل: با توجه به صورت مسئله که $x_{max}=۴cm$ نتیجه می‌گیریم ضلع دیگر تقریباً به صفر نزدیک است و در واقع طول سیم l برابر $۲x_{max}$ یعنی برابر $۸cm$ است. از طرف دیگر می‌دانیم مساحت زمانی بیشینه است که مستطیل به مربع تبدیل شود. پس در حالتی که مساحت بیشینه باشد مربعی داریم به اضلاع $۲cm$ و بیشینه گشتاور نیز داده شده لذا می‌توان جریان را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\tau=\mu B=iAB$$

$$i=\frac{\tau}{AB}=\frac{۴/۸\times۱۰^{-۸}}{(۰/۰۲)^۲(۰/۰۴)}=۰/۰۰۳\,A$$

۵۳- ثابت کنید که رابطهٔ $\tau=NiAB\sin\theta$ نه تنها در مورد حلقهٔ مستطیلی شکل ۲۴-۱۹ بلکه در مورد هر حلقهٔ بسته با هر شکلی درست است. (*راهنمایی:* تا جایی که به توزیع جریان مربوط است، به جای یک حلقه با شکل دلخواه، مجموعه‌ای از حلقه‌های دراز و نازک پهلوی هم و تقریباً مستطیلی شکل را در نظر بگیرید که تقریباً معادل با حلقه با شکل دلخواه است.)

حل: با توجه به راهنمایی مسئله هر حلقه را می‌توان مجموعه‌ای از حلقه‌های مستطیلی کوچک در نظر گرفت. از هر حلقه مستطیلی جریان i می‌گذرد که در جریان عبور از اضلاع مشترک جریان صفر است.



$$d\tau=(NiB\sin\theta)dA$$

این گشتاور نیرو بر سطح عمود است. برای کل حلقه داریم:

$$\tau=\int NiB\sin\theta dA=NiB\sin\theta\int dA=NiAB\sin\theta$$

بخش ۲۴-۱۰ گشتاور دو قطبی مغناطیسی

●۵۴- یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور دو قطبی با بزرگی $۰/۰۲J/T$ در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $۵۲mT$ از حالت سکون رها می‌شود. از چرخش دو قطبی به واسطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر آن نمی‌توان جلوگیری کرد. وقتی که این دو قطبی به اندازه‌ای که گشتاور دو قطبی آن در جهت میدان مغناطیسی است می‌چرخد، انرژی جنبشی آن برابر $۰/۸۰mJ$ است. (الف) زاویهٔ اولیهٔ میان گشتاور دو قطبی و میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) وقتی دو قطبی (به طور لحظه‌ای) بعداً به سکون می‌رسد این زاویه چقدر است؟

حل: از پایستگی انرژی داریم

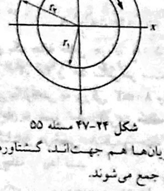
$$k_i+U_i=k_f+U_f$$

$$۰-\mu B\cos\theta=۰/۸\times۱۰^{-۳}-\mu B\cos۹۰^\circ$$

$$-(۰/۰۲)(۰/۰۵۲)\cos\theta=۰/۸\times۱۰^{-۳}-(۰/۰۲)(۰/۰۵۲)$$

$$\cos\theta=۰/۲۳۱\Rightarrow\theta=۷۶/۶^\circ$$

●۵۵- SSM دو حلقه سیم دایره‌ای شکل هم مرکز به شعاع‌های $r_۱=۲۰/۰cm$ و $r_۲=۳۰/۰cm$ واقع در صفحهٔ xy، هر یک حامل جریان ساعتگرد $۷/۰۰A$ هستند (شکل ۲۴-۴۷). (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص را پیدا کنید. (ب) اگر در حلقهٔ داخلی جریان معکوس شود محاسبه را تکرار کنید.



شکل ۲۴-۴۷ مسئله ۵۵

حل: (الف) جریان‌ها هم جهت‌اند. گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی با هم جمع می‌شوند.

$$\mu=\mu_۱+\mu_۲=iA_۱+iA_۲=i\pi(r_۱^۲+r_۲^۲)$$

$$=(۷)(۳/۱۴)[(۰/۲)^۲+(۰/۳)^۲]=۲/۸۶\,A\cdot m^۲$$

و جهت به سوی داخل صفحه است

(ب) در این حالت داریم:

$\mu = \mu_۲ - \mu_۱ = i\pi(r_۲^۲ - r_۱^۲)$

$\mu = (۷)(۳/۱۴)[(۰/۳)^۲ - (۰/۲)^۲] = ۱/۱ \mathrm{A \cdot m}$

و جهت در کل باز هم به سوی داخل صفحه است.

●۵۶- یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به شعاع ۱۵/۰cm حامل جریان ۲/۶۰A است. این حلقه طوری قرار گرفته است که بردار عمود بر صفحهٔ آن با میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۱۲/۰T زاویهٔ °۴۱/۰ می‌سازد. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه را محاسبه کنید. (ب) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر حلقه چقدر است؟

حل:

(الف) $\mu = iA = i\pi r^۲ = (۲/۶)(۳/۱۴)(۰/۱۵)^۲ = ۰/۱۸۴ \mathrm{A \cdot m^۲}$

(ب) $\tau = \mu B \sin\theta = (۰/۱۸۴)(۱۲)\lim ۴۱^\circ = ۱/۴۵ \mathrm{N \cdot m}$

●۵۷- SSM شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای با ۱۶۰ دور برابر با ۱/۹۰cm است. (الف) جریانی را که باعث ایجاد گشتاور دو قطبی مغناطیسی با بزرگی $۲/۳۰ \mathrm{A.m^۲}$ می‌شود محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ بزرگی گشتاوری را که به پیچهٔ حامل این جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت ۳۵/۰mT وارد می‌شود پیدا کنید.

حل:

(الف) $\mu = NiA = Ni\pi r^۲$

$۲/۳ = (۱۶۰)i(۳/۱۴)(۰/۰۹)^۲ \Rightarrow i = ۱۲/۷\mathrm{A}$

(ب) $\tau = \mu B = (۲/۳)(۳۵\times ۱۰^{-۳}) = ۸/۰۵\times ۱۰^{-۲} \mathrm{N \cdot m}$

●۵۸- بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین $۸/۰۰\times ۱۰^{۲۲} \mathrm{J/T}$ است. فرض کنید که این گشتاور بر اثر بارهایی که در قسمت بیرونی هستهٔ مذاب زمین حرکت می‌کنند ایجاد می‌شود. اگر شعاع مسیر دایره‌ای این بارها ۳۵۰۰km باشد، جریانی را که ایجاد می‌کنند محاسبه کنید.

حل: $\mu = iA = i\pi r^۲ \Rightarrow ۸\times ۱۰^{۲۲} = i(۳/۱۴)(۳۵۰۰\times ۱۰^۳)$

$\Rightarrow i = ۲/۰۸\times ۱۰^۹ \mathrm{A}$

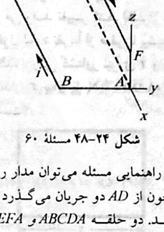
●۵۹- ضلع‌های یک حلقهٔ حامل جریان ۵/۰A به شکل مثلث قائم‌الزاویه برابر ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۸۰mT واقع است که جهت آن با جریان در ضلع ۵۰ سانتی‌متر حلقه موازی است. بزرگی (الف) گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه و (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) $A = \frac{۱}{۲}(۰/۳)(۰/۴) = ۰/۰۶ \mathrm{m^۲}$

$\mu = iA = (۵)(۰/۰۶) = ۰/۳ \mathrm{A \cdot m^۲}$

(ب) $\tau = \mu B \sin\theta = (۰/۳)(۸۰\times ۱۰^{-۳})\sin ۹۰^\circ = ۰/۰۲۴ \mathrm{N \cdot m}$

●●۶۰- شکل ۲۴-۴۸ حلقهٔ جریان $ABCDEFA$ را نشان می‌دهد که حامل جریان $i = ۵/۰۰\mathrm{A}$ است. ضلع‌های حلقه با محورهای نشان داده شده موازی‌اند و $AB = ۲۰/۰ \mathrm{cm}$ ، $BC = ۳۰/۰ \mathrm{cm}$ و $FA = ۱۰/۰ \mathrm{cm}$. گشتاور دو قطبی مغناطیسی این حلقه برحسب بردار یکه چیست؟ (*راهنمایی:* دو جریان یکسان و مخالف i را در قسمت AD در نظر بگیرید، سپس مسئله را برای دو حلقهٔ مستطیلی $ABCDA$ و $ADEFA$ حل کنید.)



شکل ۲۴-۴۸ مسئلهٔ ۶۰

حل: با توجه به راهنمایی مسئله می‌توان مدار را شامل دو حلقه در نظر گرفت چون از AD دو جریان می‌گذرد که یکدیگر را خنثی می‌کنند. دو حلقه $ABCDA$ و $ADEFA$ را در نظر می‌گیریم که بنا بر قاعده پیچه دست گشتاور دو قطبی آنها به ترتیب در جهت $-\hat{k}$ و $+\hat{j}$ است. در نتیجه می‌توان نوشت

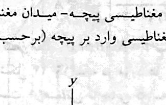
$\vec{\mu} = \vec{\mu}_۱ + \vec{\mu}_۲ = (۵)(۰/۲\times ۰/۳)(-\hat{k}) + (۰/۵)(۰/۱\times ۰/۳)(\hat{j})$

$= (۰/۱۵\hat{j} - ۰/۳۰\hat{k}) \mathrm{A \cdot m^۲}$

و بزرگی آن برابر است با:

$\mu = \sqrt{(۰/۱۵)^۲ + (-۰/۳۰)^۲} = ۰/۳۳۵ \mathrm{A \cdot m^۲}$

●●۶۱- پیچهٔ شکل ۲۴-۴۹ حامل جریان $i = ۲/۰۰\mathrm{A}$ است و در جهت نشان داده شده موازی با صفحهٔ xy دارای ۳/۰۰ دور و مساحت $۴/۰۰\times ۱۰^{-۳} \mathrm{m^۲}$ است و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۲/۰۰\hat{i} - ۳/۰۰\hat{j} - ۴/۰\hat{k})\mathrm{mT}$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل مغناطیسی پیچه- میدان مغناطیسی و (ب) گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر پیچه (برحسب بردار یکه) را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۹ مسئلهٔ ۶۱

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را حساب می‌کنیم

$\vec{\mu} = NiA(-\hat{j}) = -(۳)(۲)(۴\times ۱۰^{-۳})\hat{j} = -۰/۰۲۴\hat{j} \mathrm{A \cdot m^۲}$

حال از رابطه زیر انرژی پتانسیل مغناطیسی به دست می‌آید:

$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -(-۰/۰۲۴\hat{j})\cdot(۲\times ۱۰^{-۳}\hat{i} - ۳\times ۱۰^{-۳}\hat{j} - ۴\times ۱۰^{-۳}\hat{k})$

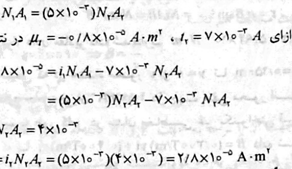
$= -۷/۲\times ۱۰^{-۵} \mathrm{J}$

(ب)

$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = (-۰/۰۲۴\hat{j})\times(۲\times ۱۰^{-۳}\hat{i} - ۳\times ۱۰^{-۳}\hat{j} + ۴\times ۱۰^{-۳}\hat{k})$

$= (۹/۶\times ۱۰^{-۵} + ۴/۸\times ۱۰^{-۵}\hat{k}) \mathrm{N \cdot m}$

●●۶۲- GO در شکل ۲۴-۵۰ الف، دو پیچهٔ هم مرکز که در یک صفحه واقع‌اند حامل جریان‌هایی در جهت مخالف یکدیگرند. جریان در پیچهٔ بزرگتر ۱ ثابت است. جریان $i_۲$ در پیچهٔ ۲ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۴-۵۰ ب گشتاور مغناطیسی خالص دو پیچه را برحسب تابعی از $i_۲$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\mu_{net,s} = ۲/۰\times ۱۰^{-۵} \mathrm{A.m^۲}$ ، و مقیاس محور افقی با $i_{۲s} = ۱۰/۰\mathrm{mA}$ مشخص شده‌اند. اگر جریان در پیچهٔ ۲ معکوس شود، بزرگی گشتاور مغناطیسی دو پیچه وقتی $i_۲ = ۷/۰ \mathrm{mA}$ باشد چقدر است؟



شکل ۲۴-۵۰ مسئله ۶۲

حل: با توجه به نمودار به ازای $i_۲ = ۵mA$ ، $\mu_t = ۰$ در نتیجه

$|\mu_۱| = |\mu_۲| \Rightarrow i_۱N_۱A_۱ = i_۲N_۲A_۲$

$\Rightarrow i_۱N_۱A_۱ = (۵\times ۱۰^{-۳})N_۲A_۲$

به ازای $i_۲ = ۷\times ۱۰^{-۳} A$ ، $\mu_t = -۰/۸\times ۱۰^{-۵} A\cdot m^۲$ در نتیجه

$-۰/۸\times ۱۰^{-۵} = i_۱N_۱A_۱ - ۷\times ۱۰^{-۳} N_۲A_۲$

$= (۵\times ۱۰^{-۳})N_۲A_۲ - ۷\times ۱۰^{-۳} N_۲A_۲$

$\Rightarrow N_۲A_۲ = ۴\times ۱۰^{-۳}$

$\mu_۲ = i_۲N_۲A_۲ = (۵\times ۱۰^{-۳})(۴\times ۱۰^{-۳}) = ۲/۸\times ۱۰^{-۵} \mathrm{A \cdot m^۲}$

مجدداً با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_۲ = ۰$ ، $\mu_۲ = ۰$ و در نتیجه $\mu_۱ = ۲/۰\times ۱۰^{-۵} \mathrm{A \cdot m^۲}$ است لذا خواهیم داشت:

$\mu = \mu_۱ + \mu_۲ = ۲/۰\times ۱۰^{-۵} + ۲/۸\times ۱۰^{-۵} = ۴/۵\times ۱۰^{-۵} \mathrm{A \cdot m^۲}$

●●۶۳- یک حلقه سیم دایره‌ای شکل به شعاع ۸/۰cm حامل جریان ۰/۲۰A است. بردار یکهٔ موازی با گشتاور دو قطبی $\vec{\mu}$ با $۰/۶۰\hat{i} - ۰/۸۰\hat{j}$ داده شده است. اگر حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۰/۲۵\mathrm{T})\hat{i} + (۰/۳۰\mathrm{T})\hat{k}$ قرار گیرد،

(الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه (برحسب بردار یکه) و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را بدست می‌آوریم

$\mu = iA = i\pi r^۲ = (۰/۲)(۳/۱۴)(۰/۰۸)^۲ = ۴/۰۲\times ۱۰^{-۳} \mathrm{A \cdot m^۲}$

$\vec{\mu} = \mu(۰/۶\hat{i} - ۰/۸\hat{j}) = ۴/۰۲\times ۱۰^{-۳}(۰/۶\hat{i} - ۰/۸\hat{j})$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = (۴/۰۲\times ۱۰^{-۳})\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۰/۶ & -۰/۸ & ۰ \\ ۰/۲۵ & ۰ & ۰/۳ \end{vmatrix}$$

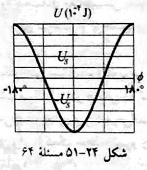
$= (-۹/۷\times ۱۰^{-۴}\hat{i} - ۷/۲\times ۱۰^{-۴}\hat{j} + ۸/۰\times ۱۰^{-۴}\hat{k})\mathrm{N \cdot m}$

(ب)

$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -(۴/۰۲\times ۱۰^{-۳})(۰/۶\hat{i} - ۰/۸\hat{j})\cdot(۰/۲۵\hat{i} + ۰/۳\hat{k})$

$= -۶/۰\times ۱۰^{-۴} \mathrm{J}$

●●۶۴- GO شکل ۲۴-۵۱ انرژی پتانسیل U یک دو قطبی مغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ را برحسب زاویهٔ ϕ میان جهت‌های $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $U_s = ۲/۰\times ۱۰^{-۴} \mathrm{J}$ مشخص شده است. این دو قطبی می‌تواند برای تغییر ϕ ، حول محوری با اصطکاک ناچیز بچرخد. چرخش پاد ساعتگرد از $\phi = ۰$ مقدارهای مثبت ϕ و چرخش ساعتگرد مقدارهای منفی به دست می‌دهد. دو قطبی در زاویهٔ $\phi = ۰$ با انرژی جنبشی چرخشی $۶/۷\times ۱۰^{-۴} \mathrm{J}$ در جهت چرخش پاد ساعتگرد رها می‌شود. دو قطبی تا چه مقدار بیشینهٔ ϕ خواهد چرخید؟ (به بیان بخش ۸-۶، نقطهٔ برگشت در چاه پتانسیل شکل ۲۴-۵۲ در چه مقدار ϕ است؟)



شکل ۲۴-۵۱ مسئلهٔ ۶۴

حل: داریم $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B\cos\phi$. با توجه به نمودار انرژی مکانیکی در $\phi = ۰$ برابر است با

$K + U = K_۰ - \mu B = ۶/۷\times ۱۰^{-۴} - ۵\times ۱۰^{-۴}$

$= ۱/۷\times ۱۰^{-۴} \mathrm{J}$

در نقطه برگشت $K = ۰$ است لذا در نقطه برگشت $U = ۱/۷\times ۱۰^{-۴} \mathrm{J}$ است و از آنجا می‌توان ϕ را بدست آورد.

$U = -\mu B\cos\phi$

$۱/۷\times ۱۰^{-۴} = -(۵\times ۱۰^{-۴})\cos\phi \Rightarrow \phi = ۹۹/۹^\circ$

●●۶۵- ILW SSM سیمی به طول $25/0$ cm که حامل جریان $4/51$ mA است باید به شکل یک پیچهٔ دایره‌ای شکل در آمده و در میدان مغناطیسی یکنواخت B با بزرگی $5/71$ mT قرار داده شود. اگر گشتاور نیروی وارد بر پیچه از میدان بیشینه شود، (الف) زاویهٔ میان $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی مغناطیسی پیچه و (ب) تعداد دورهای پیچه چقدر است؟ (پ) بزرگی این بیشینهٔ گشتاور نیرو چقدر است؟

حل: هرگاه از سیمی به طول L، N دور حلقه درست کنیم، شعاع هر حلقه برابر است با:

$$L = N2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi N}$$

و مساحت هر حلقه نیز برابر است با:

$$A = \pi R^2 = \frac{L^2}{4\pi N^2}$$

(الف) شرط بیشینه بودن گشتاور نیرو این است که زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{\mu}$، 90° باشد.

(ب) $$\mu = NiAB = \frac{iL^2 B}{4\pi N}$$

وقتی $N = 1$ باشد μ بیشینه است.

(پ) $$\mu = \frac{iL^2 B}{4\pi} = \frac{(4/5\times10^{-3})(0/25)^2(5/71\times10^{-3})}{4(3/14)}$$

$$= 1/28\times10^{-7}\ \mathrm{N\cdot m}$$

مسئله‌های اضافی

۶۶- پروتونی با بار $+e$ و جرم m با سرعت اولیهٔ $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{i}$ می‌شود. عبارتی را برای سرعت $\vec{v}$ برحسب بردار یکه در هر لحظهٔ t پیدا کنید.

حل: با توجه به یکنواختی میدان، پروتون با سرعت v_{0x} در جهت میدان حرکت می‌کند و در ضمن با تندی ثابت v_{0y} شروع به دوران می‌کند، یعنی این‌که حرکت کلی پروتون مارپیچی است. می‌توان با کمک معادله نیرو رابطهٔ لازم برای سرعت را بدست آورد

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$= m\left(\frac{dvx}{dt}\right)\hat{i} + m\left(\frac{dvy}{dt}\right)\hat{j} + m\left(\frac{dvz}{dt}\right)\hat{k}$$
$$= q(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})\times(B\hat{i})$$
$$= qB(v_z\hat{j} - v_y\hat{k})$$

با توجه به رابطه $\omega = \frac{eB}{m}$ و برابر قرار دادن مؤلفه‌ها داریم

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_y}{dt} = \omega v_z \qquad \frac{dv_z}{dt} = -\omega v_y$$

از حل معادلهٔ اول $v_x = v_{0x}$ که بیانگر حرکت در راستای میدان است. برای حل دو معادله دیگر ابتدا از معادله دوم $v_z = \frac{1}{\omega}\frac{dv_y}{dt}$ را در معادله سوم قرار داده و سپس با حل آن داریم

$$\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = -\omega v_y \Rightarrow \frac{d^2 v_y}{dt} + \omega v_y = 0$$

که این معادله حرکت یک نوسانگر ساده است و پاسخ آن $v_y = v_{0y}\cos\omega t$ (یا $v_y = v_{0y}\sin\omega t$) است و با قرار دادن مشتق آن در معادله دوم رابطه لازم برای v_z یعنی $v_z = -v_{0y}\sin wt$ به دست می‌آید. در نتیجه رابطه $\vec{v}$ برحسب بردارها، چنین است.

$$\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\cos\omega t\,\hat{j} - v_{0y}\sin\omega t\,\hat{k}$$

۶۷- یک ساعت دیواری دایره‌ای ساکن دارای صفحه‌ای به شعاع ۱۵cm است. شش دور سیم روی پیرامون آن پیچیده شده است؛ این سیم حامل جریان ۲/۰A در جهت ساعتگرد است. ساعت در جایی قرار دارد که میدان مغناطیسی خارجی یکنواختی با بزرگی ۷۰mT وجود دارد (اما ساعت هنوز دقیق کار می‌کند). عقربهٔ ساعت شمار در ساعت ۱/۰۰ بعد از ظهر دقیقاً در جهت میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. (الف) عقربهٔ دقیقه شمار پس از چند دقیقه در جهت گشتاور نیروی وارد بر سیم‌پیچ بر اثر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد؟ (ب) بزرگی گشتاور نیرو را پیدا کنید.

حل: (الف) با توجه به رابطه $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$، چون جریان ساعتگرد است لذا روی $\vec{\mu}$ به سمت داخل یعنی به سمت دیوار است. چون جهت میدان مغناطیسی به سوی ساعت ۱ است و $\vec{\tau}$ طبق قاعده ضرب برداری باید بر آن عمود باشد لذا $\vec{\tau}$ باید به سوی ساعت ۴ باشد و در نتیجه بازهٔ زمانی ۲۰ دقیقه خواهد بود.

ب) $$\tau = \mu B\sin 90^\circ = NiAB = Ni\pi r^2 B$$

که با قرار دادن مقادیر داده شد داریم $\tau = 5/94\times10^{-1}\ N\cdot m$.

۶۸- سیمی که در امتداد محور y از $y = 0$ تا $y = 0/250$ m قرار دارد حامل جریان ۲/۰۰mA در جهت منفی محور است. این سیم به طور کامل در میدان مغناطیسی غیر یکنواختی قرار دارد که با $\vec{B} = (0/300\,\mathrm{T/m})y\hat{i} + (0/400\,\mathrm{T/m})y\hat{j}$ داده شده است. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه را پیدا کنید.

حل: $$d\vec{F} = i\,d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$d\vec{l} = dy(-\hat{j}) \qquad \vec{B} = 0/3y\hat{i} + 0/4y\hat{j}$$

$$d\vec{F} = i\,dy(-\hat{j})\times(0/3y\hat{i} + 0/4y\hat{j}) = 6\times10^{-4}\ y\,dy\,\hat{k}$$

$$F = \hat{k}(6\times10^{-4})\int_0^{0/25} y\,dy = 1/87\times10^{-5}\ \hat{k}\ \ \mathrm{N}$$

۶۹- اتم ۱ به جرم ۳۵u و اتم ۲ به جرم ۳۷u هر دو با بار $+e$ یک بار یونیده‌اند. پس از ورود آنها به یک طیف‌سنج جرمی (شکل ۲۴-۱۴) و شتاب گرفتن آنها با اختلاف پتانسیل $V = 7/3$ kV از حالت سکون، هر یون در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0/50$ T حرکت می‌کند. فاصلهٔ Δx میان نقطه‌هایی که یون‌ها با آشکارساز برخورد می‌کنند چقدر است؟

حل: $$K = U \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2mV}{eB^2}}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{2(35\times1/66\times10^{-27})(7/3\times10^3)}{(1/6\times10^{-19})(0/5)^2}} = 1/456\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{2(37\times1/66\times10^{-27})(7/3\times10^3)}{(1/6\times10^{-19})(0/5)^2}} = 1/497\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x = 2(r_2 - r_1) = 8/2\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

۷۰- الکترونی که با انرژی جنبشی ۲/۵keV در امتداد جهت مثبت محور x حرکت می‌کند وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی ۱۰kV/m در جهت منفی محور y برقرار است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ برای حفظ حرکت الکترون در امتداد محور x برقرار و جهت $\vec{B}$ طوری انتخاب می‌شود که بزرگی مورد نیاز $\vec{B}$ را کمینه کند. برحسب بردار یکه $\vec{B}$ چگونه است؟

حل: $$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 4\times10^{-16} = \left(\frac{1}{2}\right)(9/11\times10^{-31})v^2$$

$$4\times10^{-16} = \left(\frac{1}{2}\right)(9/11\times10^{-31})v^2 \Rightarrow v = 2/96\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

در اینجا باید نیروهای الکتریکی و مغناطیسی باید برابر هم و در جهت مخالف هم باشند

$$qE = qvB\sin 90^\circ \Rightarrow B = \frac{E}{v}$$

$$B = \frac{10\times10^3}{2/96\times10^7} = 3/37\times10^{-4}\ T$$

و جهت آن با توجه به جهت $\vec{v}$ و $\vec{E}$ باید به سوی $-\hat{k}$ باشد.

۷۱- فیزیکدانی به نام گوداشمیت[1] روشی برای اندازه‌گیری دقیق جرم یون‌های سنگین با سنجش دورهٔ چرخش آنها در یک میدان مغناطیسی معلوم ابداع کرده است. یون یک بار یونیدهٔ ید در مدت زمان ۱/۲۹ms در میدان مغناطیسی ۴۵/۰ mT به اندازهٔ ۷/۰۰ دور می‌چرخد. جرم آن را برحسب یکای جرم اتمی حساب کنید.

حل: $$T = \frac{1/29\times10^{-3}}{7} = 1/84\times10^{-4}\ \mathrm{s}$$

1. S.A. Goudsmit

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow mw = qB \Rightarrow m\frac{2\pi}{T} = qB$$

$$m = \frac{TqB}{2\pi} = \frac{(1/84\times10^{-4})(1/6\times10^{-19})(45\times10^{-3})}{2(3/14)}$$

$$= 2/11\times10^{-25}\ \mathrm{kg} = \frac{2/11\times10^{-25}}{1/66\times10^{-27}} = 127u$$

۷۲- باریکه‌ای از الکترون‌ها با انرژی جنبشی K از یک «دریچهٔ» نازک ورقه‌ای در انتهای یک لولهٔ شتاب دهنده خارج می‌شود. یک صفحهٔ فلزی در فاصلهٔ d از این دریچه به طور عمود بر جهت باریکهٔ خروجی قرار دارد. (شکل ۲۴-۵۲). (الف) نشان دهید که اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را طوری برقرار کنیم که مقدار آن برابر با

$$B = \sqrt{\frac{2mK}{e^2d^2}}$$

باشد، از برخورد باریکه با صفحه می‌توان جلوگیری کرد. در این رابطه m و e جرم و بار الکترون هستند. (ب) $\vec{B}$ باید در چه جهتی باشد؟

شکل ۲۴-۵۲ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) و (ب)

$$m = \frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

اما می‌توان v را از $K = \frac{1}{2}mv^2$ استخراج و جایگزین کرد که خواهیم داشت:

$$r = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2mK}{e^2B^2}}$$

این شعاع باید کمتر از d باشد یعنی $\sqrt{\frac{2mk}{e^2B^2}} \le d$ و در نتیجه باید $B \ge \sqrt{\frac{2mk}{e^2d^2}}$ بوده و جهت آن باید به طرف خارج صفحه باشد.

۷۳- SSM در لحظهٔ $t = 0$ الکترونی با انرژی جنبشی ۱۲keV از $x = 0$ در جهت مثبت محور x که موازی با مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ زمین است حرکت می‌کند. بزرگی مؤلفهٔ قائم رو به پایین میدان برابر با ۵۵/۰ μT است. (الف) بزرگی شتاب الکترون ناشی از $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) وقتی که الکترون به نقطهٔ $x = 20$ cm می‌رسد، فاصلهٔ الکترون از محور x چقدر است؟

حل: از قانون دوم نیوتون $F = ma$ و از طرفی $F = evB\sin\phi$ که در آن $B_\perp = B\sin\phi$ مؤلفهٔ روبه پایین میدان مغناطیسی زمین در مسئله داده شده است لذا خواهیم داشت: $a = \frac{evB_\perp}{m}$ برای محاسبه شتاب لازم است که ابتدا v بدست آوریم که برای آن داریم

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۲\times۱۰^{۳})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}} = ۶/۴۹\times۱۰^{۷}\ \text{m/s}$$

$$a = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۴۹\times۱۰^{۷})(۵۵\times۱۰^{-۶})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})} = ۶/۲۷\times۱۰^{۱۴}\ \text{m/s}^{۲}$$

۷۴- GO ذره‌ای با بار $۲/۰\text{C}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(۲/۰\hat{i} + ۴/۰\hat{j} + ۶/۰\hat{k})\text{m/s}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(۴/۰\hat{i} - ۲۰\hat{j} + ۱۲\hat{k})\text{N}$ است. مؤلفه‌های x و y میدان مغناطیسی برابرند. $\vec{B}$ به چه صورت است؟

حل:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = ۲\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$۴\hat{i} - ۲۰\hat{j} + ۱۲\hat{k} = ۲[\hat{i}(۴B_z - ۶B_x) - \hat{j}(۲B_z - ۶B_x) + \hat{k}(۲B_x - ۴B_x)]$$

حال از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر و حل آنها خواهیم داشت $B_x = B_y = -۳T$ و $B_z = -۴T$ در نتیجه داریم

$$\vec{B} = -۳\hat{i} - ۳\hat{j} - ۴\hat{k}$$

۷۵- یک پروتون، یک دوترون $(q = +e\ ,\ m = ۲/۰\text{u})$ و یک ذرهٔ آلفا $(q = +۲e\ ,\ m = ۴/۰\text{u})$ همگی با انرژی جنبشی یکسان و در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) شعاع r_d مسیر دوترون به شعاع r_p مسیر پروتون و (ب) شعاع r_α مسیر ذرهٔ آلفا به r_p چقدر است؟

حل:

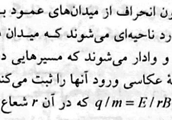
$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲K}{m}}$$

$$qvB = m\frac{v^{۲}}{r} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۲Km}}{qB}$$

(الف) $$\frac{r_d}{r_p} = \sqrt{\frac{m_d}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_d} = \sqrt{\frac{۲u}{u}}\cdot\frac{e}{e} = \sqrt{۲}$$

(ب) $$\frac{r_\alpha}{r_p} = \sqrt{\frac{m_\alpha}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_\alpha} = \sqrt{\frac{۴u}{u}}\cdot\frac{e}{۲e} = ۱$$

۷۶- طیف سنجی که در شکل ۲۴-۵۳ نشان داده شده است، یون‌هایی را که دارای سرعت یکسانی هستند از هم جدا می‌کند. یون‌ها پس از عبور از دو شکاف $S_۱$ و $S_۲$ از یک جداکنندهٔ سرعت عبور می‌کنند که مرکب از یک میدان الکتریکی است که به وسیلهٔ صفحه‌های باردار P و 'P ایجاد می‌شود و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که عمود بر میدان الکتریکی و مسیر یون است. یون‌هایی که بدون انحراف از میدان‌های عمود برهم $\vec{E}$ و $\vec{B}$ عبور می‌کنند وارد ناحیه‌ای می‌شوند که میدان مغناطیسی دوم $\vec{B}'$ وجود دارد و وادار می‌شوند که مسیرهایی دایره‌ای را طی کنند. یک صفحهٔ عکاسی ورود آنها را ثبت می‌کند. نشان دهید برای یون‌ها $q/m = E/rBB'$ که در آن r شعاع مدار دایره‌ای است.



شکل ۲۴-۵۳ مسئلهٔ ۷۶

حل: در عبور از میان دو صفحه P و P' داریم:

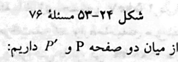
$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

در دوران در میدان B' داریم:

$$m\frac{v^{۲}}{r} = qB'v \Rightarrow mv = qB'r$$

$$m\frac{E}{B} = qB'r \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{E}{rBB'}$$

۷۷- در شکل ۲۴-۵۴، الکترونی با تندی $v = ۱۰۰\ \text{m/s}$ در امتداد محور x در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند. جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به طرف داخل صفحه و بزرگی آن $۵/۰۰\text{T}$ است. میدان الکتریکی برحسب بردار یکه را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۵۴ مسئلهٔ ۷۷

حل: چون میدان‌ها یکنواخت و الکترون بر روی خط مستقیم حرکت می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که تندی آن ثابت است یا در واقع برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = ۰ \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E} = -(۱۰۰\hat{i})\times(-۵\hat{k}) = -۵۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$$

۷۸- (الف) در شکل ۲۴-۸ نشان دهید که نسبت بزرگی میدان الکتریکی هال E به بزرگی E_C میدان الکتریکی مسبب حرکت بار (جریان) در طول نوار عبارت است از:

$$\frac{E}{E_C} = \frac{B}{ne\rho}$$

که در آن ρ مقاومت ویژهٔ ماده و n چگالی عددی حامل‌های بار است. (ب) مقدار عددی این نسبت را برای مسئلهٔ ۱۳ محاسبه کنید. (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل: داریم:

$$E_H = \frac{J}{ne}B \quad , \quad E_c = \rho J$$

در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$\frac{E_H}{E_C} = \frac{\frac{JB}{ne}}{\rho J} = \frac{B}{ne\rho}$$

$$= \frac{۰/۶۵}{(۸/۴۹\times۱۰^{۲۷})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})}$$

$$= ۲/۸۳\times۱۰^{-۳}$$

۷۹- SSM یک پروتون، یک دوترون $(q = +e\ ,\ m = ۲/۰\text{u})$ و یک ذرهٔ آلفا $(q = +۲e\ ,\ m = ۴/۰\text{u})$ با اختلاف پتانسیل یکسانی شتاب می‌گیرند و سپس وارد ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) انرژی جنبشی پروتون K_p به انرژی جنبشی ذرهٔ آلفا K_α و (ب) انرژی جنبشی دوترون K_d به K_α چقدر است؟ اگر شعاع مسیر دایره‌ای پروتون ۱۰cm باشد، شعاع (پ) مسیر دوترون و (ت) مسیر ذرهٔ آلفا چقدر است؟

حل: (الف) چون $K = qV$ است لذا می‌توان دید که

$$\frac{K_p}{K_\alpha} = \frac{q_p}{q_\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow K_p = \frac{۱}{۲}K_\alpha = ۰/۵K_\alpha$$

(ب) با بحث مشابه $K_d = ۰/۵K_\alpha$

(پ) $$m\frac{v^{۲}}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \text{ یا } r = \frac{\sqrt{۲mK}}{qB}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{r_d}{r_p} = \frac{q_p}{q_d}\sqrt{\frac{m_dK_d}{m_pK_p}} \Rightarrow r_d = r_\alpha\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲} = ۱۴\text{cm}$$

(ت) با روش مشابه داریم:

$$\frac{r_\alpha}{r_p} = \frac{q_p}{q_\alpha}\sqrt{\frac{m_\alpha K_\alpha}{m_pK_۲}} \Rightarrow r_\alpha = ۱۴\text{cm}$$

۸۰- الکترونی در لامپ تصویر یک تلویزیون قدیمی در میدان مغناطیسی با شدت $۸۳/۰\ \text{mT}$ با سرعت $۷/۲۰\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$ حرکت می‌کند. (الف) بیشینه و (ب) کمینهٔ بزرگی نیروی وارد بر الکترون از طرف میدان چقدر است؟ (پ) در نقطه‌ای شتاب الکترون $۴/۹۰\times۱۰^{۴}\ \text{m/s}^{۲}$ است. زاویهٔ میان سرعت الکترون و میدان مغناطیسی چقدر است؟

حل: **(الف)** داریم $F = qvB\sin\theta$ و بیشینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که $\sin\theta = ۱$ باشد

$$F_{\max} = qvB = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۷/۲\times۱۰^{۶})(۸۳\times۱۰^{-۱۹})$$

$$= ۹/۵۶\times۱۰^{-۱۴}\ \text{N}$$

(ب) کمینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که حرکت در راستای میدان باشد یعنی $\sin\theta = ۰$ و در نتیجه $F_{\min} = ۰$ است.

(پ) $$F = ma = (۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})(۴/۹\times۱۰^{۱۴}) = ۴/۴۶\times۱۰^{-۱۶}\ \text{N}$$

$$F = qvB\sin\theta \Rightarrow ۴/۴۶\times۱۰^{-۱۶} = ۹/۵۶\times۱۰^{-۱۴}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \theta = ۰/۲۶۷^{\circ}$$

۸۱- ذره‌ای با بار $۵/۰\mu\text{C}$ در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی $-۲۰\hat{i}\text{mT}$ و میدان الکتریکی $۳۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(۱۷\hat{i} - ۱۱\hat{j} + ۷/۰\hat{k})\text{km/s}$ است. در این لحظه نیروی الکترومغناطیسی خالص (مجموع نیروهای الکتریکی و مغناطیسی) وارد بر ذره برحسب بردار یکه چیست؟

حل:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = (۵\times۱۰^{-۶})(۳۰۰\hat{j}) = ۱/۵\times۱۰^{-۳}\hat{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= (۵\times۱۰^{-۶})[(۱۷۰۰\hat{i} - ۱۱۰۰\hat{j} + ۷۰۰\hat{k})\times(-۲۰\times۱۰^{-۳}\hat{i})]$$

$$= (-۷\times۱۰^{-۴}\hat{j} - ۱/۱\times۱۰^{-۳}\hat{k})\text{N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = ۸\times۱۰^{-۴}\hat{j} - ۱۱\times۱۰^{-۴}\hat{k}$$

۸۲- در آزمایش اثر هال، جریان $۳/۰\text{A}$ از رسانایی به پهنای $۱/۰\ \text{cm}$ و طول $۴/۰\text{cm}$ و ضخامت $۱۰\mu\text{m}$ عبور می‌کند و وقتی میدان مغناطیسی $۱/۵\text{T}$ به طور عمود از ضخامت رسانا می‌گذرد یک اختلاف پتانسیل عرضی هال (در پهنا) برابر با $۱۰\mu\text{V}$ ایجاد می‌کند. از این داده‌ها، (الف) سرعت رانشی حامل‌های بار و (ب) چگالی عددی حامل‌های بار را پیدا کنید. (پ) روی نمودار قطبیت اختلاف پتانسیل هال را با جهت‌های جریان و میدان مغناطیسی فرض شده و نیز با فرض اینکه حامل‌های بار الکترون هستند نشان دهید.

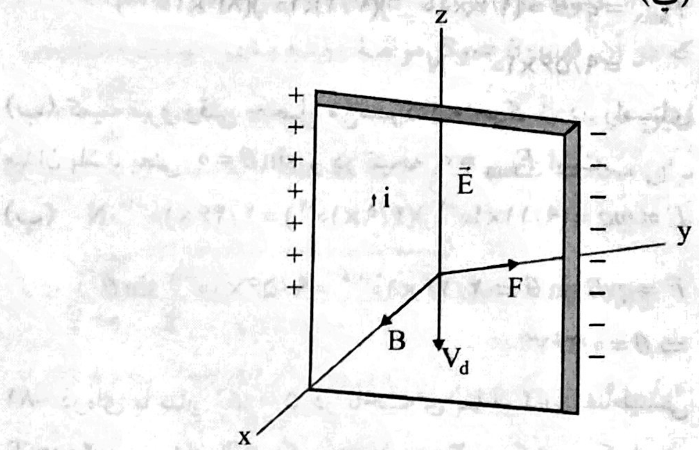
حل:

(الف) $$v_d = \frac{E_H}{B} = \frac{V_H}{Bd} = \frac{۱۰\times۱۰^{-۶}}{(۱/۵)(۱\times۱۰^{-۲})} = ۶/۷\times۱۰^{-۴}\ \text{m/s}$$

(ب) $$J = nev_d \Rightarrow \frac{i}{A} = nev_d \Rightarrow n = \frac{i}{Aev_d} = ۳$$

$$n = \frac{۳}{(۱\times۱۰^{-۷})(۱/۶۱۰^{-۱۹})(۶/۷\times۱۰^{-۴})} = ۲/۸\times۱۰^{۲۹}\ \text{m}^{۳}$$

(پ)



۸۳- **SSM** ذره‌ای به جرم ۶/۰g با تندی ۴/۰km/s در صفحهٔ xy در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت داده شده با $۵/۰\hat{i}\,\text{mT}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه، وقتی سرعت ذره در جهت ۳۷° نسبت به جهت مثبت محور x به طور پاد ساعتگرد قرار گرفته است، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $۰/۴۸\hat{k}\text{N}$ است. بار ذره چقدر است؟

حل: $\vec{v}=(۴\times۱۰^{۳})(\cos ۳۷^\circ)\hat{i}+(۴\times۱۰^{۳})(\sin ۳۷^\circ)\hat{j}$

$$=(۴\times۱۰^{۳})(۰/۸\hat{i}+۰/۶\hat{j})$$

$$۰/۴۸\ \hat{k}=q(۱۲)(-\hat{k})\Rightarrow q=-۰/۰۴\text{C}$$

۸۴- سیمی که در امتداد محور x از $x=۰$ تا $x=۱/۰۰\text{m}$ قرار دارد حامل جریان ۳/۰۰A در جهت مثبت x است. این سیم در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت $\vec{B}=(۴/۰۰\text{T/m}^۲)x^۲\hat{i}-(۰/۶۰۰\ \text{T/m}^۲)x^۲\hat{j}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: یک عنصر طول dx از سیم را در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر آن از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$d\vec{F}=id\vec{l}\times\vec{B}=i(dx\,\hat{i})\times(۴x^۲\hat{i}-۰/۶x^۲\hat{j})$$

$$=-۱/۸x^۲dx\,\hat{k}$$

$$\vec{F}=-\hat{k}(۱/۸)\int_۰^۱ x^۲dx=-۰/۶\hat{k}\ \text{N}$$

۸۵- در یک لحظه، $\vec{v}=(-۲/۰۰\hat{i}+۴/۰۰\hat{j}-۶/۰۰\hat{k})\text{m/s}$ سرعت پروتون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۲/۰۰\hat{i}-۴/۰۰\hat{j}+۸/۰۰\hat{k})\text{mT}$ است. در این لحظه (الف) نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد بر پروتون برحسب بردار یکه، (ب) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{F}$ و (پ) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را پیدا کنید.

حل: (الف) با استفاده از تعریف ضرب برداری خواهیم داشت

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -۲ & ۴ & -۶\\ ۲\times۱۰^{۳} & -۴\times۱۰^{-۳} & ۸\times۱۰^{-۳}\end{vmatrix}$$

$$=(۱/۶\times۱۰^{-۲۲})(۸\hat{i}+۴\hat{j})$$

۸۶- سرعت الکترون وقتی وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=۶۰\hat{i}\mu\text{T}$ می‌شود برابر $\vec{v}=(۳۲\hat{i}+۴۰\hat{j})\text{km/s}$ است. (الف) شعاع مسیر مارپیچی الکترون و (ب) گام مسیر چقدر است؟ (پ) از نظر ناظری که به ناحیهٔ میدان مغناطیسی از نقطهٔ ورود الکترون نگاه می‌کند، آیا حرکت مارپیچی الکترون ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

حل: **(الف)** میدان مغناطیسی B در جهت $\hat{i}$ است و با توجه به جهت بردار $\vec{v}$ مشاهده می‌کنیم $\vec{v}\times\vec{B}=-v_yB_x\hat{k}$ می‌شود پس نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون در میدان برابر $(-e)(-v_yB_x\hat{k})$ است که جهت $+\hat{k}$ است. این نیرو موجب حرکت دورانی است و می‌توان نوشت

$$m\frac{v_y^{\,۲}}{r}=ev_yB_x\Rightarrow r=\frac{mv_y}{eB_x}$$

$$r=\frac{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})(۴۰\times۱۰^{۳})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶۰\times۱۰^{-۶})}=۰/۰۰۳۸m=۳/۸\,\text{mm}$$

(ب) $$T=\frac{۲\pi r}{v_y}=\frac{۲\pi(۰/۰۰۳۸)}{۴\times۱۰^{۳}\ m/s}=۵/۹۶\times۱۰^{-۷}\ \text{s}$$

در این مدت زمان الکترون مسافت Δx را که در واقع همان گام مارپیچ است را طی می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x=v_xT=(۳۲\times۱۰^{۳})(۵/۹۶\times۱۰^{-۶})=۰/۰۱۹m$$

(پ) ساعتگر است.